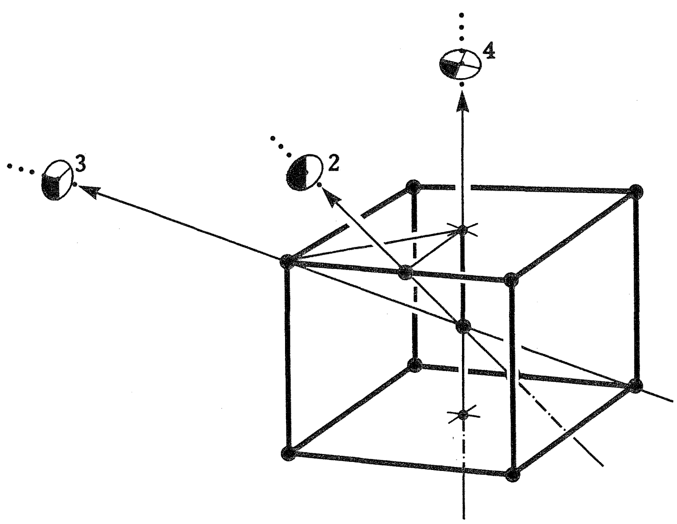
KALÉIDOSCOPES 3-D ET POLYÈDRES... LIQUIDES!(1)

Vincent Papillon, professeur, Collège Brébeuf
Richard Pallascio, professeur invité, UQAM
Dominique Dion, étudiant, U. de M.
Membres du groupe de recherche en Topologie structurale

Introduction

Sur le cube, on retrouve des axes de symétrie de rotation d'ordre 2, 3 et 4:



L'axe d'ordre 2 passe par les milieux de deux arêtes opposées.

L'axe d'ordre 3 passe par deux sommets opposés.

L'axe d'ordre 4 passe par les milieux de deux faces opposés.

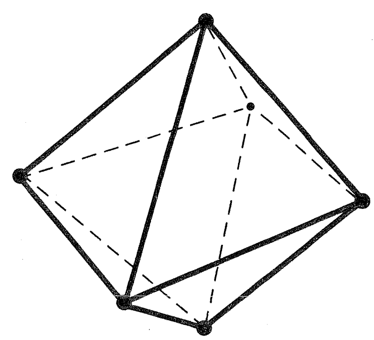
Les trois axes illustrés ci-dessus déterminent un trièdre dont le sommet (point de rencontre des trois axes) est au centre du cube. Chaque paire d'axes (deux droites concourantes) détermine un plan qui, dans le cas du cube, est un plan de symétrie (réflexion).

Des polyèdres liquides

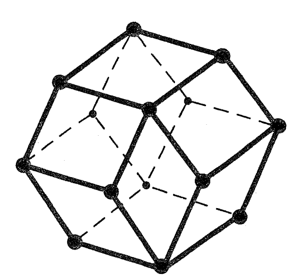
On peut matérialiser ce trièdre avec des miroirs[2] découpés et assemblés convenablement: on obtient alors un kaléidoscope tridimensionnel qui reproduit toutes les symétries du cube.

Si les joints entre les miroirs sont étanches (comme dans un aquarium), on peut verser de l'eau dans le kaléidoscope et l'incliner selon différentes positions:

— si l'axe de rotation d'ordre 4 est vertical, on verra le *cube* en eau, flottant dans l'espace...;
— si l'axe de rotation d'ordre 3 est vertical, on verra l'*octaèdre* régulier (8 triangles équilatéraux) en eau, flottant dans l'espace...;
— si l'axe de rotation d'ordre 2 est vertical, on verra le *rhombidodécaèdre* en eau, flottant dans l'espace...!



octaèdre



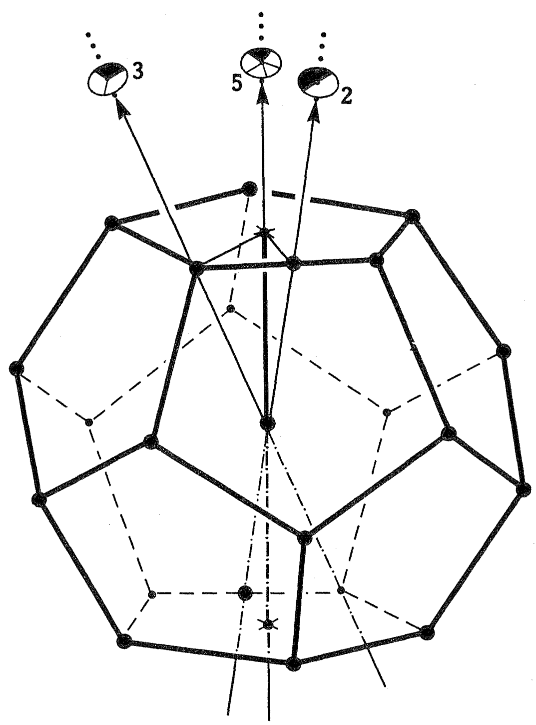
rhombidodécaèdre

(1) Activité élaborée dans le cadre d'une recherche subventionnée par le F.C.A.C.: «Identification des facteurs composant l'habileté à percevoir l'espace et de moyens permettant de la développer», no 85-AR-0006.

(2) Il existe sur le marché des miroirs sécuritaires en plastique et aluminium, qui se découpent très bien à l'x-acto.

Construction d'un kaléidoscope tridimensionnel

Après avoir bu (!) ces polyèdres, on peut construire un autre kaléidoscope tridimensionnel encore plus fascinant, à partir des axes de rotation du dodécaèdre régulier[3]: d'ordre 2, d'ordre 3, et d'ordre 5!



Le dodécaèdre régulier avec trois de ses axes de symétrie, respectivement d'ordre 2, 3 et 5.

Le sommet du trièdre est au centre du dodécaèdre et les plans engendrés par les paires d'axes sont encore des plans de symétrie (réflexion) du dodécaèdre.

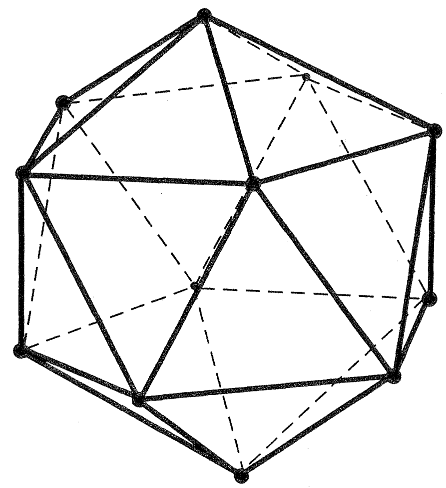
L'axe d'ordre 2 passe par les milieux de deux arêtes opposées.

L'axe d'ordre 3 passe par deux sommets opposés.

L'axe d'ordre 5 passe par les milieux de deux faces pentagonales opposées.

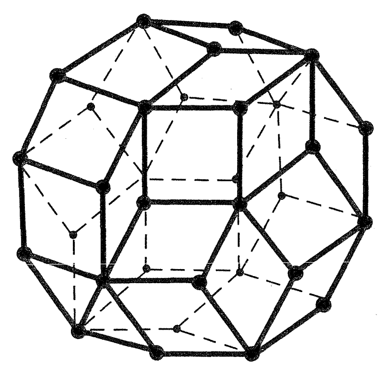
Si on matérialise le trièdre avec des miroirs et des joints étanches, on obtient un nouveau kaléidoscope tridimensionnel dans lequel on peut verser de l'eau et obtenir le dodécaèdre si l'axe 5 est vertical, l'icosaèdre (20 faces triangulaires régulières) si l'axe 3 est vertical, et le rhombitriacontaèdre si l'axe 2 est vertical.

axe d'ordre 3 vertical



icosaèdre

axe d'ordre 2 vertical



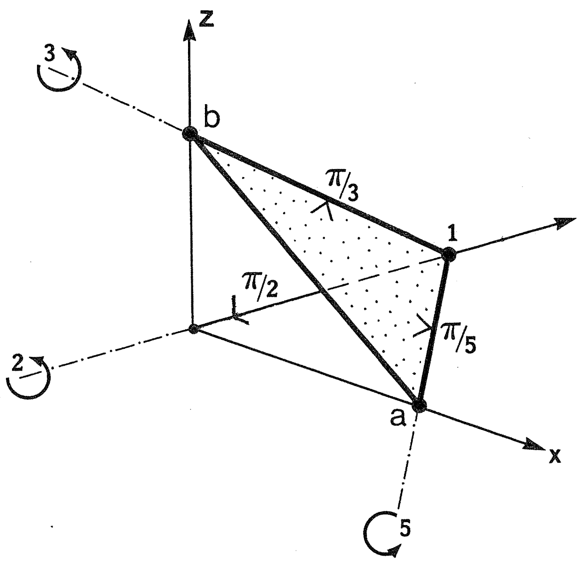
rhombitriacontaèdre[4]

La construction de ce kaléidoscope est délicate et demande une grande précision dans le découpage et l'assemblage des miroirs.

On peut placer ce trièdre dans un système de coordonnées cartésien pour faciliter le calcul et le dessin des faces triangulaires du kaléidoscope. En fait, les trois angles dièdres entre ces miroirs (pris deux à deux) déterminent entièrement le trièdre; ces angles sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{5}$.

(3) Douze (12) faces pentagonales régulières.

(4) On peut facilement construire ces polyèdres en carton avec l'ensemble «Poly-kit» de Janos Baracs, aux éditions Modulo.



Le point marqué 1 sur l'axe y indique l'unité de mesure le long des trois axes cartésiens et se trouve au centre du dodécaèdre régulier (sommet du kaléidoscope).

Les nombres a et b sur l'axe x et l'axe z se calculent facilement avec un peu de géométrie vectorielle et les notations habituelles:

Soit $\vec{n}$ le vecteur normal à la face (miroir) contenant les axes de rotation d'ordre 3 et d'ordre 5.

Alors $\vec{n} = [(0, 0, b) - (0, 1, 0)] \wedge [(a, 0, 0) - (0, 1, 0)]$
$= (b, ab, a)$ *(produit vectoriel)*

On peut rendre $\vec{n}$ unitaire en posant

$$\vec{n} = \frac{(b, ab, a)}{\sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2}}$$

En considérant les angles dièdres $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{5}$ et les vecteurs normaux aux faces-miroirs, on obtient:

$$\vec{n} \cdot \vec{i} = \cos\frac{\pi}{3} \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{k} = \cos\frac{\pi}{5}$$

d'où,

$$b = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2} \quad \text{et}$$

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2} \quad (5)$$

ce qui fait $\frac{b}{a} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

et donc $b = a \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ on substitue cette valeur de b dans l'expression (5), et on élève au carré; cela donne

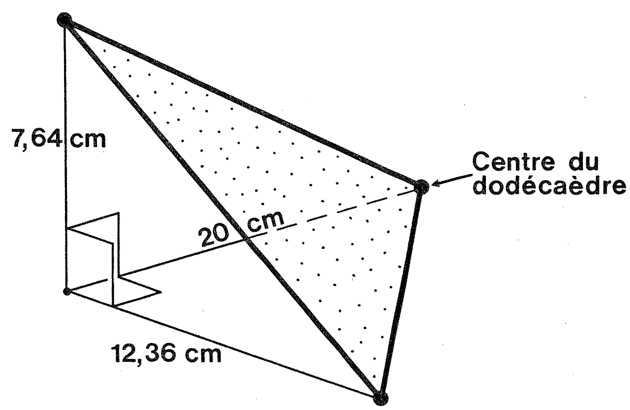
$$a^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) a^2 + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) a^2 + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) a^4$$

$$a^2 = \frac{1 - \left(\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{5}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{3}}$$

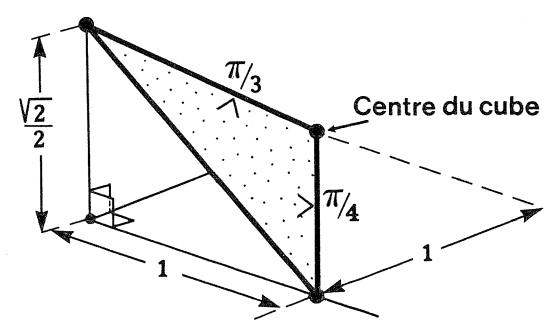
Après calcul, on obtient:

$a \approx 0{,}618$ $\qquad$ $b \approx 0{,}382$.

Par exemple, si l'unité de mesure est de 20 cm, le kaléidoscope sera construit à partir des données suivantes:



On peut aussi décrire dans les mêmes termes le kaléidoscope basé sur les symétries du cube; on obtient le trièdre suivant:



Il ne reste plus qu'à construire et à... jouer! Essayez toutes sortes d'objets dans vos kaléidoscopes tridimensionnels: billes, bandes élastiques, votre nom sur un bout de papier, etc.