

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC 1985

(niveau secondaire) Liste des lauréats

1 ^{er}	MOUBARAK, Michel	Collège St-Alexandre, Gatineau
2 ^e	GIROUX, Danièle	Collège Ste-Marcelline, Montréal
3 ^e	ALLARD, Benoît	École Secondaire Bernard-Gariépy, Tracy
4 ^e	GÉNÉREUX, Michel	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
	MIHELICH, Pierre	Séminaire Marie-Reine-du-Clergé, Métabetchouan
	MAYRAND, Jean-Rémi	Collège St-Charles Garnier, Québec
	RIENDEAU, Jean-François	Collège de L'Assomption, L'Assomption
	PELLETIER, Michel	Collège St-Charles Garnier, Québec
9 ^e	DESHARNAIS, Josée	Collège des Eudistes, Montréal
	DUFRESNE, Chantal	École Secondaire Louis-Riel, Montréal
	TREMBLAY, Nicolas	Séminaire Marie-Reine-du-Clergé, Métabetchouan
12 ^e	FLAMAND, Éric	École Secondaire François-Bourrin, Beauport
	CÔTÉ, Geneviève	Polyvalente des Sources, Dollard
	SUYS, Marc	Polyvalente des Sources, Dollard
15 ^e	BÉNARD, François	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
16 ^e	LACHAPELLE, Stéphane	Collège St-Bernard, Drummondville
	BOISVERT, Stéphane	Collège St-Bernard, Drummondville
	NADEAU, Daniel	Collège Bourget, Rigaud
	SANTERRE, Pierre-Yves	Séminaire des Pères Maristes, Sillery
	TOUSIGNAN, Denise	Collège Ste-Marcelline, Montréal
21 ^e	FILTEAU, Martin	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
	DORÉ, Jean-François	Collège St-Charles Garnier, Québec
	FAMILI, Mazda	École Pierre-Laporte, Montréal
	LAPOINTE, Stéphane	Polyvalente Charles-Gravel, Chicoutimi
	GERVAIS, Simon	Séminaire St-François, St-Augustin
26 ^e	TREMBLAY, Yannick	Polyvalente Charles-Gravel, Chicoutimi
	LAUZON, Marie	Collège Bourget, Rigaud
	LE COMTE, Patrice	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
29 ^e	GUÉRIN, Frédéric	Polyvalente Dominique Racine, Chicoutimi
	VILLEMURE, Pierre	École Secondaire Louis-Riel, Montréal
	KORTSCHAK, Ernst	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
	SOUMIS, Jean-François	École Secondaire Paul-Gérin-Lajoie, Outremont
	BOUCHARD, Denis	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
34 ^e	BROUSSEAU, Sébastien	Collège de L'Assomption, L'Assomption
	FRARE, Paola	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
	LEJEUNE, André	Petit Séminaire de Québec, Québec
	LAUZON, Jocelyn	Polyvalente des Sources, Dollard
	BOVO, Éveline	Pensionnat St-Nom-de-Marie, Montréal
	CAMIRAND, Charles	Collège St-Charles Garnier, Québec
40 ^e	RIOPEL, Denis	Séminaire de Joliette, Joliette
	DROLET, François	Collège Français, Montréal
	GIRARD, Dominique	Polyvalente de Jonquière, Jonquière
	TARDIF, Valérie	Collège Ste-Marcelline, Montréal
44 ^e	PLOURDE, Simon	Séminaire Marie-Reine-du-Clergé, Métabetchouan
	DES MARCHAIS, Béatrice	Collège Ste-Marcelline, Montréal
	ROBY, Philippe	Collège St-Charles Garnier, Québec
	COULOMBE, Richard	Polyvalente Deux-Montagnes, Deux-Montagnes
	PROVENCHER, Johanne	École J.-B. Meilleurs, Repentigny
49 ^e	BEAUCHEMIN, Julie	Collège Régina Assumpta, Montréal
	MARTIN, Michel	Polyvalente Jean-Dolbeau, Dolbeau
	WARREN, Alain	Collège de L'Assomption, L'Assomption
	RINGUETTE, Sylvain	Polyvalente Dominique-Racine, Outremont

53 ^e	LAFONTAINE, Stéphane CHAUSSE, Pierre TAILLON, Mireille DETTERS, Sonia BOUDREAU, Robert BÉDARD, Dominique COSSETTE, Daniel LANGLOIS, Pierre	Polyvalente A.-Norbert-Morin, Mont-Rolland Collège de L'Assomption, L'Assomption École Mont-de-la-Salle, Laval Collège Ste-Marcelline, Montréal Séminaire Marie-Reine-du-Clergé, Métabetchouan Collège Champagneur, Rawdon Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke Collège de Lévis, Lévis
62 ^e	CHARTRAND, André DROLET, Sophie GIUGOVAZ, Lydia SAINT-ARNAUD, Nicolas	Polyvalente Deux-Montagnes, Deux-Montagnes Polyvalente de Loretteville, Loretteville École Secondaire St-Joseph, St-Hyacinthe Petit Séminaire de Québec, Québec
66 ^e	OLIVIER, Sébastien GIRARD, Isabelle LOIGNON, Michel MÉLANÇON, Éric RHEAULT, Philippe MASSE, Marco LAMONTAGNE, Isabelle JUTEAU, Éric LENOIR, Dominique	Séminaire de Joliette, Joliette École Mont-de-la-Salle, Laval Collège St-Bernard, Drummondville École Secondaire Mont-St-Sacrement, Valcartier Collège Mont-Saint-Louis, Montréal Collège Clarétain, Victoriaville Collège Bourget, Rigaud École St-Maxime, Laval Polyvalente des Sources, Dollard
75 ^e	DUCHARME, Bernard LAPLANTE, Patrice LALANDE, Frédéric CHARNEUX, Marco PELLETIER, Julie DE PELLEGRIN, Carina	Séminaire de Joliette, Joliette Polyvalente J.-H. Leclerc, Granby École Mont-de-la-Salle, Laval École secondaire Pont-Viau, Laval École des Ursulines, Québec Villa Maria, Montréal
81 ^e	DANG, Vu Hai VIAU, Nicolas-F. SIMARD, Christian MORIN, Stéphane VO LE, Vinh Phuc TREMBLAY, Daniel CARRIER, Martin PICARD, Jocelyn	Polyvalente Baie St-François, Valleyfield Collège Bourget, Rigaud École Jean XXIII, Dorval Petit Séminaire de Québec, Québec École Secondaire Paul-Gérin-Lajoie, Outremont Polyvalente de Jonquière, Jonquière Collège St-Charles-Garnier, Québec Externat St-Jean-Eudes, Québec
89 ^e	NINTUNZE, Alphonse AFARIAN, Armen GINGRAS, Sylvain VENNE, Patrick BÉLANGER, Nathalie BURKE, Marie-Chantal CHARLEBOIS, Alain DE BELLEFEUILLE, André BÉLIVEAU, Caroline DROUET, Jean-Marc DUBREUIL, Stéphane PELLETIER, Jean-Luc BÉLANGER, Guy LAPLANTE, Isabelle GIRARD, Isabelle XIE, Jia-Jun MAMODEHOUSSEN, Chemir LAMBERT, Pierre Jr. CONTI, Jean-François DUFRESNE, Jean-François ARTUSO, Lisa SIVEC, Silvia GASCON, Brigitte LUSSIER, Daniel BOURETTE, Richard	École Normale de Rutovu, Burundi, Afrique Centrale Polyvalente des Sources, Dollard Collège des Eudistes, Montréal Collège des Eudistes, Montréal Collège des Eudistes, Montréal Collège des Eudistes, Montréal Collège des Eudistes, Montréal Collège des Eudistes, Montréal Pensionnat du Saint-Nom-de-Marie, Montréal Polyvalente J.-H. Leclerc, Granby Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke Collège Bourget, Rigaud Polyvalente Baie St-François, Valleyfield Collège St-Bernard, Drummondville Collège Régina Assumpta, Montréal Polyvalente Pierre Laporte, Ville Mont-Royal Collège Mont-Saint-Louis, Montréal Collège Ste-Anne-de-la-Pocatière, La Pocatière Petit Séminaire de Québec, Québec Petit Séminaire de Québec, Québec Collège Ste-Anne, Lachine Collège Français, Montréal Polyvalente Armand-Corbeil, Terrebonne École Secondaire Louis-Riel, Montréal École Secondaire François Bourrin, Beauport

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC — 1984

Niveau secondaire

Nombre de participants: 1443

Moyenne: 11.2

I. CLASSEMENT PAR COTES

	1 ^{er} seizième	2 ^e seizième	2 ^e huitième	2 ^e quart	2 ^e moitié
COTE	A	B	C	D	E
Note correspondante	23 à 69	20 à 22	15 à 19	10 à 14	0 à 9

II. CLASSEMENT PAR QUARTILES

QUARTILE	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e	4 ^e
Note correspondante	11 à 69	8 à 10	4 à 7	0 à 3

III. CLASSEMENT PAR DÉCILES

DÉCILE	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e
Note correspondante	17 à 69	15 à 16	14 à 15	11 à 13	9 à 10
DÉCILE	6 ^e	7 ^e	8 ^e	9 ^e	10 ^e
Note correspondante	6 à 8	4 à 5	2 à 3	1	0

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

Niveau secondaire

Le 7 février 1985

14:00-17:00

Le concours mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour que ces grands talents puissent se détacher nettement de la masse des autres, le questionnaire est abondant et varié: plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de deux ou trois questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Si vous en trouvez six, vous êtes excellent en mathématiques. Seuls quelques génies en donneront sept. Bonne chance!

Question 1

PROBLÈME DE VACHES

Un troupeau est constitué de vaches noires et de vaches brunes. On a constaté qu'en moyenne quatre vaches noires et trois vaches brunes donnent autant de lait en cinq jours que trois vaches noires et cinq brunes en quatre jours. Lesquelles, des vaches noires et des vaches brunes de ce troupeau, donnent le plus de lait?

Solution suggérée

Soient x et y les productions quotidiennes moyennes des vaches noires et des vaches brunes respectivement. On a alors la relation $5(4x + 3y) = 4(3x + 5y)$, d'où $20x + 15y = 12x + 20y$, et

$$8x = 5y, \text{ ou } x = \frac{5}{8}y.$$

Donc $x < y$ et les vaches brunes donnent plus de lait que les noires.

Question 2

TROUVER L'ERREUR

Le recenseur d'une communauté constituée exclusivement de jeunes couples et de leurs enfants a terminé son rapport par les conclusions suivantes:

- (a) Il y a plus de parents que d'enfants.
- (b) Chacun des garçons a une sœur.
- (c) Il y a plus de garçons que de filles.
- (d) Il n'y a aucun couple sans enfants.

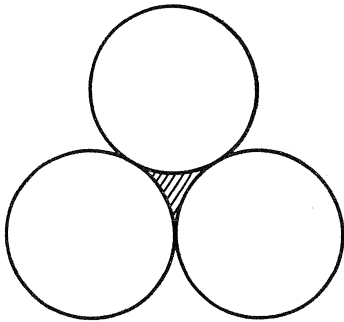
Son rapport fut rejeté à cause d'une erreur dans ses conclusions. Laquelle?

Solution suggérée

Soit x le nombre de familles. Alors le nombre de parents est au plus $2x$. Par (d) et (b), chaque couple a au moins une fille. Il y a donc au moins x filles et, par (c), il y a au moins $x + 1$ garçons. Donc au moins $2x + 1$ enfants, contre au plus $2x$ parents. Donc (a) ne peut être vrai.

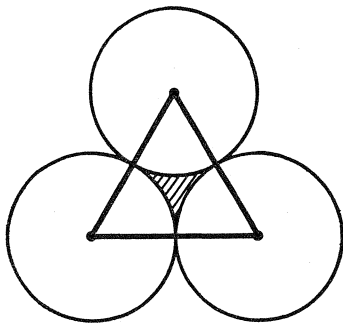
Question 3

LES TROIS CERCLES ADJACENTS



On a trois cercles de rayon 6, chacun adjacent aux deux autres comme dans la figure ci-contre. Calculer l'aire du triangle curviligne déterminé par ces trois cercles.

Solution suggérée



En joignant les centres des trois cercles on obtient un triangle rectiligne équilatéral de côté 12. La hauteur de ce triangle est

$$\sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}$$

et l'aire du triangle rectiligne est

$$\frac{12 \times \sqrt{108}}{2} \text{ ou } 36\sqrt{3}.$$

Pour obtenir l'aire du triangle curviligne, il suffit de retrancher, de l'aire du triangle rectiligne, trois fois les sixièmes de l'aire du cercle de rayon 6:

$$3\left[\frac{1}{6}(\pi 6^2)\right] = 18\pi.$$

L'aire du triangle curviligne est donc

$$36\sqrt{3} - 18\pi.$$

Question 4

LES AIGUILLES D'UNE MONTRE

Déterminer à la seconde près le moment où, entre 9:00 et 10:00, les aiguilles d'une montre forment un angle de 180° .

Solution suggérée

Supposons que le moment où les aiguilles formeront un angle de 180° arrivera à 9 heures et $15 + x$ minutes.

La distance angulaire parcourue par l'aiguille des minutes de 9:15 à 9 heures et $15 + x$ minutes sera de

$$\left(\frac{x}{60}\right) (2\pi)$$

et la distance angulaire parcourue par l'aiguille des heures de 9:00 à 9 heures et $15 + x$ minutes sera de

$$\left(\frac{15+x}{60}\right) \left(\frac{1}{12}\right) (2\pi).$$

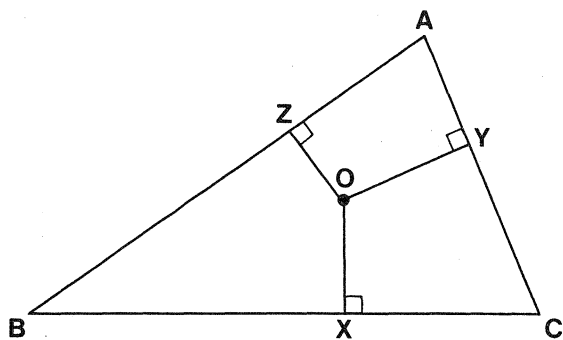
On aura donc

$$\frac{x}{60} = \left(\frac{15+x}{60}\right) \left(\frac{1}{12}\right),$$

soit une minute et 21,78 secondes après 9:15.

Question 5

UN PROBLÈME DE TRIANGLE



Dans un triangle ABC quelconque, on choisit un point O quelconque. Soient X, Y, Z les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur BC, AC et AB respectivement. Montrer que la somme des carrés de \overline{AY} , \overline{BZ} et \overline{CX} est égale à la somme des carrés de \overline{AZ} , \overline{BX} et \overline{CY} .

Solution suggérée

Construire les segments OA, OB et OC. On a alors, en appliquant six fois le théorème de Pythagore,

$$\overline{AY}^2 + \overline{BZ}^2 + \overline{CX}^2 = (\overline{OA}^2 - \overline{OY}^2) + (\overline{OB}^2 - \overline{OZ}^2) + (\overline{OC}^2 - \overline{OX}^2)$$

et

$$\overline{AZ}^2 + \overline{BX}^2 + \overline{CY}^2 = (\overline{OA}^2 - \overline{OZ}^2) + (\overline{OB}^2 - \overline{OX}^2) + (\overline{OC}^2 - \overline{OY}^2).$$

Dans les deux cas, on obtient:

$$(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2) - (\overline{OX}^2 + \overline{OY}^2 + \overline{OZ}^2).$$

Question 6

PAUL ET MARIE

Paul et Marie sont nés le même jour de l'année et sont tous deux dans la vingtaine. L'âge présent de Paul est égal à quatre fois l'âge que Marie avait quand Paul avait trois fois l'âge que Marie avait quand Paul avait deux fois l'âge que Marie avait. Quels sont les âges de Paul et de Marie?

Solution suggérée

Soit t_0 le temps où l'âge de Paul était le double de celui de Marie. Soit x l'âge de Marie au temps t_0 . Alors l'âge de Paul au temps t_0 est $2x$ et la différence entre leurs âges est aussi x .

Soit t_1 le temps où l'âge de Paul était trois fois l'âge que Marie avait au temps t_0 . Au temps t_1 , l'âge de Paul est donc $3x$ et celui de Marie, $2x$.

L'âge de Paul, quatre fois l'âge que Marie avait au temps t_1 , est donc $4(2x)$ ou $8x$.

Comme Paul est dans la vingtaine, on a $8x = 24$ et $x = 3$. Donc Paul a vingt-quatre ans et Marie en a vingt et un.

Note: Au temps t_1 , Paul avait neuf ans et Marie six. Au temps t_0 , Paul avait six ans et Marie trois.

Question 7

LES NOMBRES SECONDS

Dans la suite des nombres premiers, qui commence par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ..., il existe des couples $(p, p + 2)$ dont les deux éléments, p et $p + 2$, sont premiers. Exemples:

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), \dots$$

Considérons maintenant la suite des nombres $p + 1$, où $(p, p + 2)$ est un couple de nombres premiers:

$$4, 6, 12, 18, \dots$$

Exception faite du plus petit de ces nombres, 4, tous sont divisibles par 6, puisque, dans toute suite de la forme $p, p + 1, p + 2$, il y a un nombre qui est divisible par 3 et au moins un qui est divisible par 2 et, p et $p + 2$ étant premiers, $p + 1$ est divisible par 2 et par 3, donc par 6.

Effectuant la division par 6, nous obtenons la suite des *nombres seconds*:

$$1, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 17, 18, 23, 25, 30, 32, 33, \dots$$

Montrer que si la différence entre deux nombres seconds consécutifs est 1 alors leur somme est divisible par 5 (à l'exception du couple (1, 2)).

Solution suggérée

La paire $(q, q + 1)$ de nombres seconds provient d'un quadruplet

$$(p, p + 2, p + 6, p + 8)$$

de nombres premiers. On a

$$q = \frac{p+1}{6} \text{ et } q + 1 = \frac{p+7}{6},$$

d'où

$$q + (q + 1) = 2q + 1 = \frac{p+4}{3}.$$

(On note que $p + 4$ est divisible par 3, puisque $2q + 1$ est un entier.)

Comme $p, p + 2, p + 4, p + 6$ et $p + 8$ sont cinq nombres impairs consécutifs, l'un d'eux est divisible par cinq. C'est $p + 4$ qui est divisible par cinq, puisque les autres sont premiers. Donc

$$q + (q + 1) = \frac{p+4}{3}$$

est divisible par cinq.