CONCOURS DE L'AMQ 1985 *(niveau collégial I et II)*

Liste des lauréats — Questions et solutions

PRIX

1er	BÉDARD François	Collège Montmorency	200 $
2e	VO Minh Tue	Vanier College	125 $
3e	QUESNEL Ronny	Collège Jean-de-Brébeuf	100 $
4e	HENTGARTNER Michel	Collège Ste-Foy	90 $
5e	CONTOGOURIS Ersy	Collège Marie-de-France	50 $
6e	SHEEBA Khan	Marianopolis College	50 $
7e	FERHAAN Ahmad	Marianopolis College	50 $
8e	PIOTTE Martin	Collège de Rosemont	50 $
9e	ROUSSEAU Paul Marc	Collège Jean-de-Brébeuf	40 $
10e	PARENTEAU Marc	Collège Ste-Foy	30 $
11e	LAROUCHE Pierre	Collège Jean-de-Brébeuf	25 $
12e	BAILLARGEON Martin	Collège de l'Assomption	25 $

Mentions honorables *(dans l'ordre de mérite)*

NEUFELD Christopher	Marianopolis College
EAST Allan	Champlain College (St-Lambert-Longueuil)
MAYRAND Marcel	Collège Ste-Foy
LOCONG Philippe	Collège F.X.-Garneau
LEVITAN Michael	Marianopolis College
BLANCHARD Benoît	Collège Bois-de-Boulogne
GAGNON Alain	Collège de Sherbrooke
LABBÉ Gabriel	Collège de Sherbrooke
DESROCHES Joël	Collège Jean-de-Brébeuf
FABRY Frédéric	Collège Stanislas
TRUCHON François	Champlain College (Ste-Foy)
WARREN Eryk	Champlain College (Ste-Foy)
MORIN Gilles	Collège de Valleyfield
MARCEAU Étienne	Collège Ste-Foy
HOA Phu Nguyen	Vanier College (Snowdon)
WHITE André	Collège de Sherbrooke
BERNARD Guylaine	Collège Mérici
BEAULIEU Hélène	Petit Séminaire de Québec
DURON Michel	Collège Marie-de-France
SHEEHAN Martin	Petit Séminaire de Québec
GAUDREAU Nicholas	Collège Jean-de-Brébeuf

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

Niveau collégial I et II

Le vendredi 1er mars 1985 — de 9 h 00 à 12 h 00.

Question 1

Calculer $\int_0^1 x^3 (1 - x^2)^{100}\, dx$

Solution suggérée

La fonction $f(x) = x^3 (1 - x^2)^{100}$ est un polynôme et est donc intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$.

Écrivons $\int_0^1 x^3 (1 - x^2)\, dx$ comme

$$\int_0^1 x^2 (1 - x^2)^{100}\, x\, dx \text{ et}$$

posons le changement de variable $y = 1 - x^2$ qui est monotone sur $[0, 1]$. On obtient alors:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 (1 - x^2)^{100}\, x\, dx &= -\frac{1}{2} \int_1^0 (1 - y)\, y^{100}\, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (y^{100} - y^{101})\, dy \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{y^{101}}{101} - \frac{y^{102}}{102} \Big|_0^1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{102} \right) \\
&= \frac{1}{20604}
\end{aligned}$$

Question 2

Calculer le plus grand entier positif n tel que 5^n divise

$5^5! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (5^5 - 2)(5^5 - 1)(5^5 - 1)\, 5^5$.

Solution suggérée

Les facteurs divisibles par 5 sont les multiples de 5. On peut les classer par le nombre de facteurs de 5 qu'ils contiennent:

a) les multiples de 5^5: il y en a 1 et il contient 5 facteurs;
b) les multiples de 5^4 qui ne sont pas des multiples de 5^5: il y en a $5 - 1 = 4$ et ils contiennent $4 \times 4 = 16$ facteurs;
c) les multiples de 5^3 qui ne sont pas des multiples de 5^4: il y en a $5^2 - 5 = 20$ et ils contiennent $20 \times 3 =$ facteurs.
d) les multiples de 5^2 qui ne sont pas des multiples de 5^3: il y en a $5^3 - 5^2 = 100$ et ils contiennent $100 \times 2 = 200$ facteurs;
e) les multiples de 5^1 qui ne sont pas des multiples de 5^2: il y en a $5^4 - 5^3 = 500$ et ils contiennent $500 \times 1 = 500$ facteurs.

On a donc au total $500 + 200 + 60 + 16 + 5 = 781$ facteurs et ainsi le plus grand entier positif cherché est 5^{781}.

Question 3

Sachant que $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout x réel, montrer que, pour chaque $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{1}{2}} e} + \frac{1}{\log_{1+\frac{1}{4}} e} + \dots + \frac{1}{\log_{1+\frac{1}{2^n}} e} \leqslant 1.$$

Solution suggérée

Puisque $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout x réel, alors on peut écrire pour $n = 1, 2, \dots$:

$$1 + \frac{1}{2} \leqslant e^{\frac{1}{2}},\ 1 + \frac{1}{4} \leqslant e^{\frac{1}{4}}, \dots, 1 + \frac{1}{2^n} \leqslant e^{\frac{1}{2^n}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leqslant e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}} \leqslant e$$

puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$.

Observant que $\frac{1}{\log_a x} = \log_x a$ pour $x > 1$ et $a > 1$,

on peut donc écrire:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left(\log_{1+\frac{1}{2^i}} e\right)^{-1} &= \sum_{i=1}^{n} \log_e (1 + 2^{-i}) \\
&= \log_e \prod_{i=1}^{n} (1 + 2^{-i}) \\
&\leqslant \log_e e = 1
\end{aligned}$$

Question 4

Un carré numérique 4 x 4 est un carré divisé en 16 petits carrés égaux contenant chacun un numéro différent de 1 à 16. On définit l'écart d'un tel carré numérique comme étant la plus grande différence entre les numéros de deux petits carrés qui se touchent (diagonalement ou autrement). Dire quel est le plus petit écart possible et donner un carré numérique ayant cet écart.

Exemple: Les deux carrés ci-dessous ont $16 - 2 = 14$ comme écart.

1	12	3	6
11	4	7	13
9	10	2	14
5	16	15	8

1	12	3	6
11	4	7	13
9	10	2	16
5	14	15	8

Solution suggérée

Dans un tel carré, on peut se déplacer d'un carré quelconque (disons celui contenant le numéro 1) à un autre quelconque (disons celui contenant le numéro 16) en faisant au plus 3 déplacements (diagonaux ou pas). On a donc visité 4 petits carrés numérotés 1, x, y, et 16 et l'écart est plus grand ou égal à $x - 1$, à $y - x$ et à $16 - y$ donc 3 fois l'écart est plus grand ou égal à $16 - y + y - x + x - 1 = 16 - 1 = 15$, ainsi l'écart est plus grand ou égal à $\frac{15}{3} = 5$.

Or 5 est un écart possible car le carré

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

a précisément 5 pour écart.

Le plus petit écart possible est donc 5.

Question 5

Soit A l'ensemble des entiers naturels n satisfaisant à la condition suivante:

«Si $n^2 + 3$ est divisible par un nombre premier p, alors il existe un entier positif k tel que ^{2} est plus petit que n et tel que $k^2 + 3$ est également divisible par p.»

Donner trois éléments de A qui sont plus petits que 50.

Solution suggérée

Si $n \in A$, alors on a $n < 50$; donc $n \leqslant 49$ et $k^2 < n$; d'où $k \leqslant 6$.

Faisons donc une liste des diviseurs premiers «p» possibles de $n^2 + 3$ (i.e. des nombres premiers qui divisent $k^2 + 3$ où $k \leqslant 6$).

k	1	2	3	4	5	6
k^2	1	4	9	16	25	36
$k^2 + 3$	4	7	12	19	28	39
diviseurs de $k^2 + 3$ différents de 1	2	7	2	19	2	3
			3		7	13

Si $n \in A$, les seuls nombres premiers qui divisent $n^2 + 3$ sont donc 1, 2, 3, 7, 13, 19.

Notons que $5^2 + 3$ est divisible par 2 et 7 seulement, que 2 divise $1^2 + 3$ et que 7 divise $2^2 + 3$; comme $1^2, 2^2 < 5$, donc $5 \in A$.

Pour trouver les autres éléments de A, il suffit de faire une liste des $n^2 + 3$ avec $n < 50$ et de vérifier si les facteurs premiers de $n^2 + 3$ appartiennent à la liste et se retrouvent dans le tableau ci-haut pour un $k^2 < n$. Complétons maintenant la liste.

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$n^2 + 3$	52	67	84	103	124	147	172	199	228	259	292	327	364	403	444	487	532
facteur non divisible par un nombre premier acceptable	13	67	3	103	31		43	199	19	37	73	109	13	403	37	487	
acceptable	2		2 7		2	7 3	4		2 3	7	2	3	2 7		2 3		2 7 19

Donc, les trois plus petits éléments de A sont 5, 12, 23.

Question 6

Soit $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ un polynôme avec la condition $1 < a < b < c$ et écrivons
$P'(x) = (x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c)$.

Montrer alors que le polynôme
$Q(x) = (x^2 + 1) P(x) P'(x) + x (P(x))^2 + (P'(x))^2$
possède au moins cinq racines réelles distinctes. Rappelons la propriété suivante: «Si un polynôme prend en a et en b ($a < b$) des valeurs de signe contraire, alors ce polynôme s'annule en un point de l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Remarque: *solution suggérée au prochain numéro, octobre 85.*