CONCOURS DE L'AMQ 1984 *(niveau secondaire)*

Liste des lauréats

1er	VO, Minh Tue	École Secondaire St-Luc, Montréal
2e	LEMIEUX, François	Collège de Lévis, Lévis
3e	LAVOIE, Martin	Séminaire de Joliette, Joliette
4e	TRUCHON, François	Collège St-Charles Garnier, Québec
5e	MARTIN, Charles	Séminaire de Joliette, Joliette
6e	MOUBARAK, Michel	Collège St-Alexandre, Touraine
7e	HEBRAIS, Philippe	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
8e	ALLARD, Benoît	École Bernard-Gariépy, Tracy
	BELLEVILLE, Patrice	Collège des Eudistes, Montréal
10e	MATTE, Robert	Collège St-Alexandre, Touraine
11e	RIENDEAU, Jean-François	Collège de L'Assomption, L'Assomption
	PARADIS, Jean-François	Polyvalente Paul Le Jeune, St-Tite
13e	DESJARDINS, Daniel	Collège St-Alexandre, Touraine
	BEAULIEU, Hélène	École des Ursulines de Québec, Québec
	DUCHESNE, Daniel	Collège de Lévis, Lévis
16e	GRAVEL, Anne-Marie	Villa Maria, Montréal
	MARCEAU, Simon	Collège St-Charles Garnier, Québec
	PELLETIER, Julie	École des Ursulines de Québec, Québec
	CARON, Geneviève	Collège Ste-Marcelline, Montréal
20e	MOORE, François	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	NHIEU, Duy Minh	École Secondaire St-Luc, Montréal
22e	GRENIER, François	Collège St-Charles Garnier, Québec
	BLANCHARD, Benoît	École Secondaire Pont-Viau, Laval
	BEAUCHEMIN, Christian	Collège St-Alexandre, Touraine
	FOUCAULT, Luc	Collège Notre-Dame, Montréal
	BOULET, Benoît	Polyvalente Paul Le Jeune, St-Tite
27e	BÉGIN, Nathalie	Collège du Sacré-Cœur, Sherbrooke
	EDWARDS, David	Polyvalente Pierre-Laporte, Montréal
29e	TRAN, Pascal	Collège St-Charles Garnier, Québec
	MAYRAND, Jean-Rémi	Collège St-Charles Garnier, Québec
	LACROIX, Nathalie	Collège Ste-Marcelline, Montréal
32e	DUBÉ, Josée	Collège Mont-St-Louis, Montréal
	PROVENCHER, Mario	Collège L'Assomption, L'Assomption
	MARCOTTE, Jean	Séminaire St-François, St-Augustin
	TSAKALAKIS, Photini	Polyvalente Lucien Pagé, Montréal
	CORDEAU, Éric	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
37e	FLAMAND, Éric	École Secondaire M.S.C., Beauport
	PERRON, Stéphane	Collège de Lévis, Lévis
	MAZUR, Nathalie	Collège Ste-Marcelline, Montréal
	MORAN, Kevin	Collège St-Charles Garnier, Québec
	OUELLET, Pierre	Séminaire St-François, St-Augustin
	ST-MARSEILLE, Marc	Collège Mont Saint-Louis, Montréal
	POTVIN, Marie-Josée	Collège Ste-Marcelline, Montréal
	KNOLL, Sonja	Collège Français, Outremont

45e	JOHNSON, Martine	Polyvalente Armand-Corbeil, Terrebonne
	GERTLER, Pierre	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	BOURQUE, Alain	École Secondaire Louis-Riel, Montréal
	BLONDIN, Bruno	Collège Notre-Dame, Montréal
	DAVID, Geneviève	Collège Régina Assumpta, Montréal
	GERVAIS, Simon	Séminaire St-François, St-Augustin
	BLOUIN, Renaud	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
	TREMBLAY, Nicolas	Séminaire Marie-Reine du Clergé, Metabetchouan
53e	GORINOV, Ivo	École Secondaire St-Luc, Montréal
	NGUYEN-HUYNH, Thu-Van	Polyvalente Pierre-Laporte, Montréal
	BARIL, Éric	École Secondaire St-Joseph, Pointe-du-Lac
	GILBERT, Marco	Séminaire St-Georges, St-Georges — Beauce
	LANGLOIS, Patrick	Petit Séminaire de Québec, Québec
	LAMOUREUX, Julie	Pensionnat du St-Nom-de-Marie, Montréal
	GOUPIL, Josée	Collège Ste-Marcelline, Montréal
60e	GALLAGHER, Karen	Collège Ste-Marcelline, Montréal
	GERVAIS, Isabelle	Polyvalente Thérèse-Martin, Joliette
	DAMARSINGH, Karime	Collège Notre-Dame-du-Sacré-Cœur, Montréal
	CAPELLE, Philippe	Collège Notre-Dame-du-Sacré-Cœur, Montréal
	L'ÉCUYER, Nicolas	Collège Mont St-Louis, Montréal
	GAGNON, Daniel	Collège Français, Outremont
	RAYMOND, David	École Secondaire Jean-de-la-Mennais, La Prairie
67e	HEWES, Martin	Collège des Eudistes, Montréal
	TRUDEL, Benoît	Collège Notre-Dame-du-Sacré-Cœur, Montréal
	BENNETT, Shaun	Collège Bourget, Rigaud
	BOUCHER, Julie	Collège Eulalie Durocher, St-Lambert
71e	PELLETIER, Michel	Collège St-Charles Garnier, Québec
	LE THANH, Trang	Polyvalente Lucien Pagé, Montréal
	SYLVESTRE, François	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
	SARRAZIN, Julie	Polyvalente A. Norbert-Morin, Mont-Rolland
	PAGEAU, Alain	École Polyvalente Deux-Montagnes, Deux-Montagnes
	LEBLANC, Bruno	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
	CHARETTE, Virginie	Villa Maria, Montréal
	TREMBLAY, Nathalie	Collège Eulalie Durocher, St-Lambert
	DENAULT, Michel	Collège Clarétain, Victoriaville
	SHEEHAN, Martin	Séminaire de Québec, Québec
	LANGLOIS, Marie-France	Externat Sacré-Cœur, Rosemère
82e	ROSSBACH, Edwin	Séminaire St-François, St-Augustin
	DUMAS, François	Séminaire St-François, St-Augustin
	NGUYEN, Manh Cuong	Polyvalente Lucien Pagé, Montréal
	MORISSETTE, Nathalie	Collège Régina Assumpta, Montréal
	MASSE, Brigitte	Collège Mont Notre-Dame, Sherbrooke
	LEBEAU, Josée	Collège Mont Saint-Louis, Montréal
	ARES, François	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
	ISSA, Rita	Polyvalente Antoine de St-Exupéry, Montréal
90e	SIMONEAU, Sophie	Externat St-Jean-Eudes, Québec
	CHOQUET, André	Collège Mont St-Louis, Montréal
	ROBITAILLE, Sylvain	Collège Mont Saint-Louis, Montréal
	SIMARD, Serge	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
	COSSETTE, Pierre	Séminaire de St-Hyacinthe, St-Hyacinthe
	NORMANDEAU, Magdalen	École des Ursulines de Québec, Québec
	DINH, René	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
	BERTRAND, Christian	École Secondaire Pont-Viau, Laval
	LEJEUNE, André	Petit Séminaire de Québec, Québec
99e	MELO, José	École Secondaire de l'Île, Hull
	RENAUD, Marc-André	Collège Notre-Dame, Montréal

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

Niveau secondaire

Le 8 mars 1984 14:00-17:00

Questions et solutions

Le concours mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour que ces grands talents puissent se détacher nettement de la masse des autres, le questionnaire est abondant et varié: plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Si vous en trouvez six, vous êtes excellent en mathématiques. Seuls quelques génies en donneront sept. Bonne chance!

Question 1

À LA SECONDE PRÈS

À quel moment, à la seconde près, en octobre 1984, le mois sera-t-il écoulé dans la même proportion que l'année 1984?

Solution suggérée

Soix x la portion écoulée d'octobre 1984 et y la portion écoulée de l'année 1984. Au moment où le mois et l'année se seront écoulés dans la même proportion, on aura (puisque 1984 est une année bissextile)

$$\frac{x}{31} = \frac{y}{366}$$

et

$$y = 31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + x$$
$$= 274 + x.$$

Par substitution on obtient

$$\frac{x}{31} = \frac{274 + x}{366}$$

ou

$$x = \frac{274 \cdot 31}{366 \cdot 31} = \frac{8\,494}{335} = 25 + \frac{119}{335}.$$

On sera donc le 26 octobre. Quelle heure sera-t-il? On a

$$24 \times \frac{119}{335} = \frac{2\,856}{335} = 8 + \frac{176}{335}.$$

Il sera donc huit heures et ... combien de minutes? On a

$$60 \times \frac{176}{335} = \frac{10\,560}{335} = 31 + \frac{175}{335}.$$

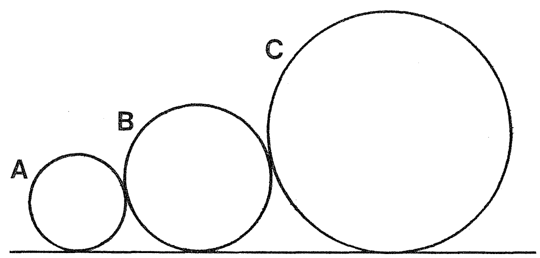
Il sera donc 08:31 et ... combien de secondes? On a

$$60 \times \frac{175}{335} = \frac{10\,500}{335} = 31 + \frac{115}{335} = 31{,}34\ ...$$

Le moment cherché est donc le 26 octobre 1984 à 08:31:31 (et trente-quatre centièmes de seconde).

Question 2

DES CERCLES TANGENTS QUI SE SUIVENT...



Trois cercles tangents successifs A, B et C sont, en même temps, tangents à une droite comme dans la figure. Sachant que les rayons respectifs des cercles sont de 1, 2 et 3 unités, quelle est la distance entre le centre du cercle A et le centre du cercle C?
(Attention, la figure n'est pas à l'échelle. Il est donc inutile de mesurer).

Solution suggérée

La difficulté du problème vient du fait que les centres ne sont pas alignés.

Examinons d'abord le cas de deux cercles tangents, centrés en M et N, de rayons respectifs $r < R$ (Fig. 1).

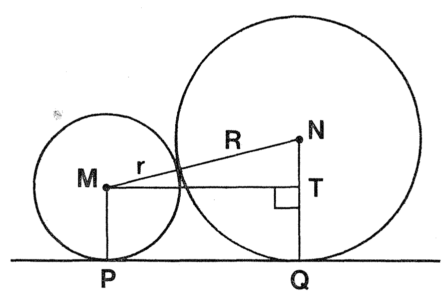


Figure 1

Si P et Q sont les points de contact avec la droite, on trouve:

$$\overline{PQ} + \overline{MT} = \sqrt{\overline{MN}^2 - \overline{TN}^2} = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\,Rr.$$

On en déduit (Fig. 2) que

$$\overline{OX} = \overline{UW} = \overline{UV} + \overline{VW} = 2\sqrt{1 \times 2} + 2\sqrt{2 \times 3}$$
$$= 2\,(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

et

$$\overline{O'X} = \overline{O'W} - \overline{XW} = \overline{O'W} - \overline{OU} = 3 - 1 = 2.$$

D'où,

$$\overline{OO'} = \sqrt{\overline{OX}^2 + \overline{O'X}^2} = 2\sqrt{9 + 4\sqrt{3}}.$$

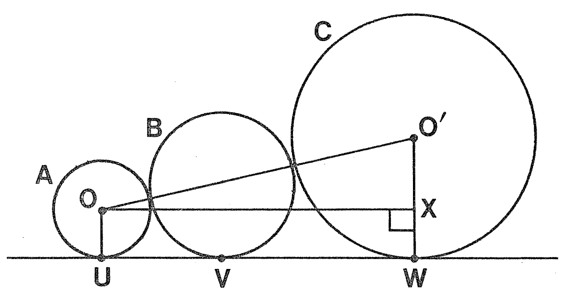


Figure 2

Question 3

AU RESTAURANT

Dans un restaurant, cinq convives ont commandé cinq mets différents. Quand les cinq plats commandés arrivent, de combien de façons peuvent-ils leur être distribués de telle sorte qu'aucun ne reçoive le mets qu'il a commandé?

Solution suggérée

Soient A, B, C, D et E les cinq convives et soient *a, b, c, d* et *e* les cinq mets qu'ils ont commandés. Supposons d'abord que A a reçu le mets *b.* Si B a reçu *a,* alors il n'y a que deux possibilités pour C, D et E et on obtient les solutions 1 et 2. Si B reçoit le plat de celui qui reçoit *a,* on a la solution 3, 4 ou 5. Si B ne reçoit ni *a* ni le plat de celui qui reçoit *a,* alors pour chaque choix de plat pour B il y a exactement deux façons de répartir les autres et on obtient les solutions 6 à 11. On a donc onze cas si A reçoit *b.* On en trouvera onze autres si A reçoit *c,* onze pour *d* et onze pour *e.*
Total: 44.

	A	B	C	D	E
1	b	a	d	e	c
2	b	a	e	c	d
3	b	c	a	e	d
4	b	d	e	a	c
5	b	e	d	c	a
6	b	c	d	e	a
7	b	c	e	a	d
8	b	d	e	c	a
9	b	d	a	e	c
10	b	e	a	c	d
11	b	e	d	a	c

Question 4

DES VALISES DE CUIR

Alain et Bernard travaillent dans un atelier. Ils ont deux jours pour coudre un lot de valises de cuir. Faisant un bilan après une journée de travail, ils découvrent les faits suivants: ils n'ont pas le même rendement; ce qu'il leur reste à faire demain leur prendra une heure de plus que ce qu'ils ont fait aujourd'hui, pourvu que chacun garde le même rythme qu'aujourd'hui; le nombre des valises à coudre demain comporte les mêmes deux chiffres que le nombre des valises produites aujourd'hui, mais dans l'ordre inverse; enfin, le premier chiffre du total d'aujourd'hui est le nombre de valises qu'Alain produit en une heure et l'autre chiffre est le rendement de Bernard. Combien d'heures ont-ils travaillé aujourd'hui?

Solution suggérée

Soient a et b le nombre de valises produites par Alain et Bernard respectivement en une heure. Supposons qu'ils ont travaillé h heures aujourd'hui. Alors, d'après les données

$$(a + b)\,h = 10a + b$$

et

$$(a + b)(h + 1) = 10b + a.$$

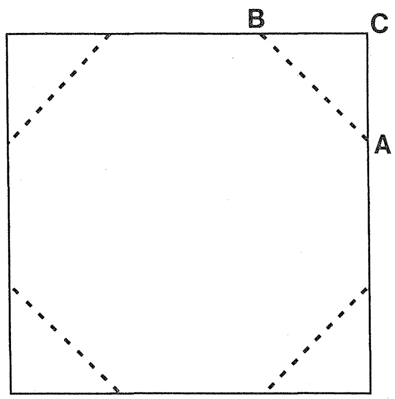
Si on soustrait la première équation de la deuxième, on obtient $a + b = 9b - 9a$, ou $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$. Comme $0 \leqslant a, b \leqslant 9$, alors $a = 4$ et $b = 5$. Ils ont donc produit 45 valises, au rythme de 9 valises à l'heure. Ils ont travaillé cinq heures.

Question 5

LA GRANDE TABLE OCTOGONALE

Paul demande comment couper un triangle à chaque coin de sa grande table carrée, de 2 mètres de côté, de façon à ce qu'elle devienne octogonale et régulière (i.e. 8 côtés égaux).

Indiquez-lui comment déterminer la longueur AC.



Solution suggérée

Posons $x = \overline{AC}$ (voir figure 1), alors $\overline{AB} = x\sqrt{2}$ (par Pythagore). Puisque l'on doit avoir $\overline{AB} = \overline{AA'}$, on en tire l'équation

$$x + x\sqrt{2} + x = 2.$$

C'est-à-dire

$$x\,(2 + \sqrt{2}) = 2$$

d'où,

$$x = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2\,(2 - \sqrt{2})}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = 2 - \sqrt{2}$$

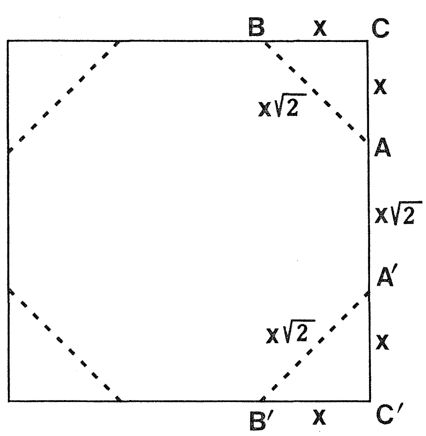


Figure 1

Notons que

$$\overline{OC'} = \sqrt{2} = \overline{AC'},$$

d'où, une construction élégante du point A par un arc de cercle centré en C′ et de rayon $\overline{C'O}$, (voir figure 2).

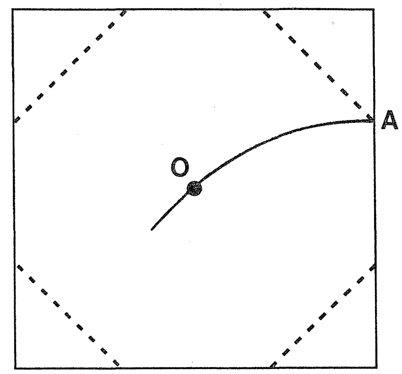


Figure 2

Question 6

UN PEU D'ALGÈBRE...

Posons $S = x + y$ et $P = xy$. Il est facile de vérifier que l'on a alors

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P$$

et

$$x^3 + y^3 = S^3 - 3SP.$$

Trouver une formule du même genre, faisant appel à S et P seulement, pour

$$x^5 + y^5.$$

Solution suggérée

Il y a plusieurs solutions. La plus courte se présente comme suit:

$$\begin{aligned}(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2) &= x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5 \\ &= x^5 + y^5 + x^2y^2\,(x + y).\end{aligned}$$

D'où, l'on tire successivement

$$\begin{aligned}x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - (xy)^2\,(x + y) \\ &= (S^2 - 2P)\,(S^3 - 3SP) - P^2S \\ &= S^5 - 5S^3P + 5SP^2.\end{aligned}$$

Question 7

LES ENTIERS INVERSÉS

Existe-t-il deux nombres entiers *distincts* positifs m et n pour lesquels on ait l'égalité

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{17}?$$

Si oui, trouvez-les.
Si non, pourquoi?

Solution suggérée

On a successivement, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{17}$

si et seulement si $\frac{n+m}{mn} = \frac{1}{17}$

si et seulement si $mn - 17(m+n) = 0$

si et seulement si $mn - 17(m+n) + 17^2 = 17^2$

si et seulement si $(m-17)(n-17) = 17^2$

si et seulement si $m - 17 = 1$ et $n - 17 = 17^2$ (cas A)

ou

$m - 17 = 17$ et $n - 17 = 17$ (cas B)

ou

$m - 17 = 17^2$ et $n - 17 = 1$ (cas C).

Le cas B est à rejeter et il ne reste que les deux possibilités A et C: A donne $m = 18$ et $n = 306$, C donne $m = 306$ et $n = 18$.

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC — 1984

Niveau secondaire

Nombre de participants: 1127

Moyenne: 7.9

I. **CLASSEMENT PAR COTES**

	1er seizième	2e seizième	2e huitième	2e quart	2e moitié
COTE	A	B	C	D	E
Note correspondante	23 à 64	17 à 22	12 à 16	6 à 11	0 à 5

II. **CLASSEMENT PAR QUARTILES**

QUARTILE	1er	2e	3e	4e
Note correspondante	13 à 64	7 à 12	2 à 6	0 à 1

III. **CLASSEMENT PAR DÉCILES**

DÉCILE	1er	2e	3e	4e	5e
Note correspondante	20 à 64	14 à 19	11 à 13	8 à 10	6 à 7
DÉCILE	6e	7e	8e	9e	10e
Note correspondante	4 à 5	2 à 3	1	0	0