Chronique: *HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES*

PYTHAGORE ET LA TORTUE

Louis Charbonneau, U.Q.A.M.

Consciente (à peine) de la faible intuition supportant le concept de continuité, avant d'entreprendre l'étude analytique de la droite dans le plan cartésien, j'ai voulu m'assurer que chaque élève percevait la droite comme un ensemble infini de points.

Inspirée par une conférence de M. Nicolas Herscovics, de l'Université Concordia, sur la fonction du premier degré, j'ai proposé l'exercice suivant à mes classes de secondaire IV (les élèves ont quinze ans en moyenne):

- *Tracez une droite;*
- *Placez deux points, A et B, sur cette droite;*
- *Vous avez déterminé un segment de droite; combien y a-t-il de points entre A et B?*

D'après des expériences antérieures, réalisées en Angleterre, les élèves répondraient en majorité «aucun point» ou encore «un seul, le point du milieu».

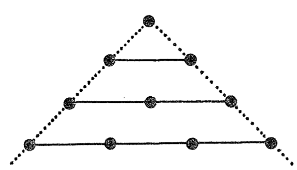
Cependant, je n'ai pu vérifier cette tendance: forts sans doute d'un conditionnement d'au moins trois ans de secondaire (l'étude de la droite est débutée en secondaire I), plusieurs élèves ont répondu, en chœur, une infinité de points.

Si, en entrevue, M. Herscovics pouvait se satisfaire d'une réponse du genre «il y a beaucoup de points», «il y en a mille» ou deux mille, (le but n'étant pas de discuter «l'infini»), dans une classe de trente élèves, la question provoqua un débat: les partisans d'un nombre infini de points d'un côté, restreints alors à quelques individus, et ceux d'un nombre fini de points, de l'autre. Ces derniers ajoutaient qu'ils étaient dans l'incapacité de les compter, mais que ça ne signifiait pas pour autant, qu'il y en ait une infinité (ce qui est infini étant ce qui ne finit jamais). Ceux-ci étaient-ils majoritaires? Je n'ai pas pensé, à ce moment-là, les dénombrer. Quoiqu'il en soit, en passant par des arguments de crayons aiguisés et de grossissement microcoscopique d'éléments encore divisibles, les partisans d'un nombre infini de points ont tenté de convaincre leurs adversaires; rien à faire. On a fini par en convenir, mais de nombreux élèves l'ont accepté comme une nouvelle défaite face à des mathématiques incompréhensibles.

Extrait de: Claudine Mary, «*Une somme de points sans dimension donne-t-elle une droite à une dimension)*» (Daniel S., étudiant en mathématiques 432), Cours d'histoire des mathématiques. U.Q.A.M.

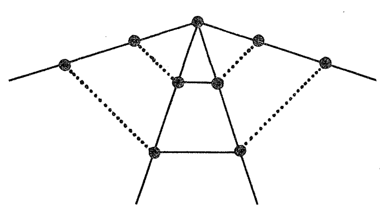
SURPRISE! Comment peut-on avoir fait quatre ans d'études secondaires et ne pas savoir qu'une droite se compose d'une infinité de points? C'est troublant, d'autant plus que la représentation usuelle de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est justement la droite «réelle». Est-ce à dire qu'un élève qui, se fiant aux dires du professeur de mathématiques, associe dans sa tête les nombres réels et les points de la droite peut en venir à la conclusion que *l'ensemble* $\mathbb{R}$ *n'a qu'un nombre fini d'éléments...* Où cela finira-t-il?

Ces «pauvres» étudiants auraient-ils des problèmes cognitifs? Quoi qu'il en soit, ils peuvent se targuer d'avoir d'illustres prédécesseurs dont le plus universellement connu est sans contredit Pythagore, celui-là même du théorème. La devise de l'école pythagoricienne (entre 600 et 400 av. J.C.) était «Toutes choses sont nombres», où «nombres» signifie de fait «nombres entiers». Les pythagoriciens tentèrent d'expliquer l'univers en termes de nombres. Ainsi, à chaque polygone est associée une suite de nombres dits polygonaux, comme on peut le voir ci-dessous.



1
$3 = 1 + 2$
$6 = 1 + 1 + 3$
$10 = 1 + 2 = 3 = 4$

nombres triangulaires



1

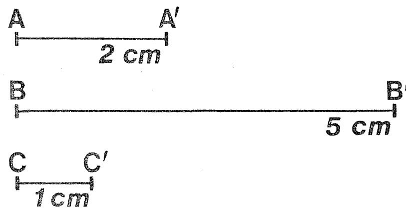
$5 = 1 + 4$

$12 = 5 + 7$

nombres pentagonaux

De façon similaire, ils étudièrent les nombres polyèdres. Ils développèrent aussi une théorie de la comparaison des nombres entiers: la théorie des proportions. Forts de celle-ci, ils l'appliquèrent à différents domaines. Par exemple, en musique, ils remarquèrent que la juxtaposition de deux sons est d'autant plus harmonieuse, ou agréable, que la longueur des deux cordes qui les produisent forme un rapport simple.

Puisque les pythagoriciens avaient développé une théorie des rapports, on pourrait croire que leur monde arithmétique englobait beaucoup plus que les nombres entiers. En effet, il suffit de confondre ces rapports de nombres entiers et les fractions pour conclure que ces philosophes de l'Antiquité auraient dû prendre pour devise «Toutes choses sont nombres *rationnels*». Mais là, ce serait oublier qu'une fraction n'a de sens qu'en fonction d'une unité déterminée. La fraction 1/2 signifie un demi de quelque chose, elle est purement relative. Ainsi, on peut parler du segment de droite AA′ (ci-dessous) aussi bien comme 2/5 de $\overline{BB'}$ que comme 2 fois $\overline{CC'}$.



Tout ce que je mesure autour de moi s'exprime en fractions d'une certaine unité de mesure. Quelle que soit la précision de l'instrument de mesure que j'utilise, le résultat sera toujours un nombre fractionnaire. Si je veux comparer les longueurs de deux tiges que j'ai mesurées avec un tel instrument, il me sera toujours possible de changer mon unité de mesure de façon à ce que les deux tiges aient pour mesure un nombre entier de cette nouvelle unité. Par exemple, pour comparer une tige de 2/7 m à une tige de 1 m, je peux choisir une nouvelle unité que j'appelle *mumu* et qui équivaut à 1/7 m. Mes deux longueurs s'expriment alors ainsi: 2 mumus, 7 mumus. (Pouvez-vous définir une unité de mesure qui me permettrait d'exprimer en nombres entiers les longueurs 37/24 m et 28/32 m?). Plus grand est le nombre de tiges différentes dont on compare les longueurs, plus petite sera l'unité permettant de les mesurer toutes en nombres entiers. Un ensemble de longueurs ayant cette propriété, à savoir qu'il existe une unité de mesure permettant de les exprimer en nombres entiers de cette unité, est dit *commensurable* (c'est-à-dire ayant une *com*mune mesure).

Les disciples de Pythagore, se basant sans doute sur leur expérience et sur des raisonnements semblables à celui esquissé dans le paragraphe précédent, croyaient que *tout ensemble* de longueurs était commensurable. Considérant des ensembles de plus en plus «gros» de longueurs, ils se trouvèrent confrontés au problème de savoir s'il existait une unité la plus petite possible qui «mesurerait» toutes les autres. De là, par un chemin qui reste inconnu, ils résolurent leur problème en imaginant l'existence d'«atomes» de longueurs. Combien y a-t-il de tels «atomes» dans un segment de droite? Bien malin qui le sait. Mais puisque cet «atome» existe, il ne saurait y en avoir une infinité. Nous nous retrouvons au même point que ces étudiants de l'anecdote qui se disaient «dans l'incapacité de les [points] compter, mais que ça ne signifiait pas pour autant, qu'il y en ait une infinité (ce qui est infini étant ce qui ne finit jamais)». Dans ce contexte, la découverte par Hippasus de Metapontum (5e siècle av. J.C.) que la longueur de la diagonale d'un carré et celle d'un côté ne sont pas commensurables prend figure d'une tragédie. L'existence de longueurs incommensurables entraîne l'effondrement de l'univers pythagoricien. La légende raconte d'ailleurs que Hippasus et d'autres pythagoriciens voyageaient en mer lorsque celui-là fit part de sa découverte. Pris de panique, ses compagnons l'auraient immédiatement jeté par dessus bord. Pour une première fois dans l'histoire des mathématiques, et ce n'est pas la dernière, une découverte venait contredire ce que le sens commun et l'expérience semblaient soutenir. L'impact fut si violent qu'il faudra plus de 1800 ans d'efforts plus ou moins soutenus pour réunifier la science des longueurs (géométrie) à celle des nombres (arithmétique).

L'équivalence entre l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et la droite, qu'on présente aujourd'hui dans nos classes sans autre forme de procès, repose sur une conception non-intuitive de la droite. Par ailleurs, la vision pythagoricienne de la géométrie sommeille probablement en chacun de nous, car elle prend racine dans nos expériences quotidiennes. Peut-on faire parcourir à un jeune esprit en une phrase ce qui a pris à l'humanité des siècles? Pythagoricienne par obligation, la tortue que, bientôt, de nombreux élèves du primaire suivront à la trace rendra-t-elle le saut encore plus difficile à réussir?

Dans le prochain numéro du *Bulletin,* je redeviendrai historien pour rechercher l'origine de mots courants en mathématiques tels que racine, exposant, puissance, etc. À bientôt. J'attends toujours vos questions et vos lettres à l'adresse suivante:

Louis Charbonneau
Dépt. math. et info., U.Q.A.M.
C.P. 8888, Succ. A
Montréal, Qué.
H3C 3P8

Le comité de rédaction du Bulletin AMQ attend vos articles
Date de tombée: **31 octobre 1984**