CONCOURS DE L'AMQ 1984 *(niveau collégial I et II)*

Liste des lauréats — Questions et solutions

PRIX	1er	PIOTTE Martin	Collège de Rosemont	200 $
	2e	CHAN Wah Keung	Vanier College (Campus Sainte-Croix)	150 $
	3e	ELNITSKY Serge	Collège Marie-de-France	100 $
	4e	BÉDARD François	Collège Montmorency	70 $
	4e	BERGERON Mario	Collège de Jonquière	70 $
	6e	LEVAC Éric	Collège André-Grasset	60 $
	7e	GRAVEL Hélène	Collège Jean-de-Brébeuf	50 $
	8e	COUTU Stéphane	Collège Bois-de-Boulogne	35 $
	8e	CUMYN Michelle	Collège Marie-de-France	35 $
	8e	NAUFAL Selim	Collège Marie-de-France	35 $
	8e	QUENTIN Marie-Emmanuelle	Collège Marie-de-France	35 $
	12e	BONFILS Claire	Collège Marie-de-France	30 $
	12e	CHIN Paulina	Champlain College (Campus St-Lambert-Longueuil)	30 $

MENTIONS HONORABLES	MAYRAND Marcel	Collège de Sainte-Foy
	PHAN Doan Trang	Collège Bois-de-Boulogne
	TESSIER Pascal	Collège de Maisonneuve
	CONTOGOURIS Ersy	Collège Marie-de-France
	VALERIO Nick Robert	Vanier College (Campus Snowdon)
	DUFOUR Matthieu	Collège F.-X.-Garneau
	LAVOIE Christian	Collège de Saint-Jérôme
	POULIN Michel	Collège F.-X.-Garneau
	BARIBAULT Robert	Collège de Sainte-Foy
	BRIZELI Boris	Vanier College (Campus Sainte-Croix)
	GUY Jean-François	Collège Jean-de-Brébeuf
	MEL'ČUK André	Collège Stanislas
	BAILLARGEON Jean-Martin	Collège de l'Assomption
	CRÉPEAU Yves	Collège Bois-de-Boulogne
	DROLET Réal	Séminaire Saint-Augustin
	FORGET Marc	Collège de Sainte-Foy
	MORIN Pierre	Collège Jean-de-Brébeuf
	RICHARD Stephan	Collège de Jonquière
	STEWART David B.	Vanier College (Campus Snowdon)
	FLAMAND Stéphane	Collège de Chicoutimi
	LAFLEUR Robert	Collège Jean-de-Brébeuf
	PARÉ Éloi	Collège de Maisonneuve
	CHERNA Peter	Marianopolis College
	DUMOULIN Serge	Collège de Rosemont
	DURON Michel	Collège Marie-de-France
	HOLDRINET Éric	Collège Saint-Jean-sur-Richelieu
	LOCONG Philippe	Collège F.-X.-Garneau
	MARTIN Ingrid	Collège Bois-de-Boulogne
	ROY Jean	Petit Séminaire de Québec

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

Niveau collégial I et II

Le vendredi, 24 février — de 9 h 00 à 12 h 00.

Questions et solutions

Question 1

Choisissez un nombre quelconque de 3 chiffres en base dix, donc de la forme abc. Juxtaposez ce nombre à lui-même pour former un nombre à 6 chiffres de la forme abcabc. Divisez ce nouveau nombre par 7. Divisez le quotient obtenu par 11. Divisez le quotient ainsi obtenu par 13. Quel nombre final trouvez-vous? Comment expliquez-vous ce résultat?

Solution suggérée

On retrouve à la fin le nombre initial abc. Cela vient de ce que $7 \times 11 \times 13 = 1001 = 1000 + 1$. Par conséquent, $abc \times 7 \times 11 \times 13 = abc000 + abc = abcabc$.

Question 2

On a trois jetons désignés par A, B et C. L'un est rouge, l'autre, bleu, et le troisième, noir. On sait qu'un et un seul des énoncés suivants est vrai:

a) A est rouge;
b) B n'est pas rouge;
c) C n'est pas bleu.

De quelle couleur est chaque jeton?

Solution suggérée

Désignons par A_r, A_b, A_n, B_r, etc., les énoncés *A est rouge, A est bleu,* et ainsi de suite, et par v et f les valeurs de vérité *vrai* et *faux.* Le fait qu'un et un seul des énoncés a), b) et c) est vrai peut s'exprimer par:

$$(A_r \wedge B_r \wedge C_b) \wedge (\sim A_r \wedge \sim B_r \wedge C_b) \wedge (\sim A_r \wedge B_r \wedge \sim C_b) \equiv v \qquad (1)$$

Mais, $A_r \wedge B_r \equiv f$, puisque deux jetons ne peuvent être de la même couleur, donc (1) se ramène à:

$$(\sim A_r \wedge \sim B_r \wedge C_b) \wedge (\sim A_r \wedge B_r \wedge \sim C_b) \equiv v \qquad (2)$$

Supposons que:

$$\sim A_r \wedge \sim B_r \wedge C_b \text{ soit vraie.}$$

Alors C est bleu. Supposons ensuite que A est rouge, alors B serait noir, et l'on aurait a) et b) vrais simultanément.

Supposons plutôt que A est noir et B, rouge. Alors aucun des énoncés a), b) et c) ne serait vrai. Il faut donc conclure que $\sim A_r \wedge \sim B_r \wedge C_b$ est faux, et (2) se ramènera à:

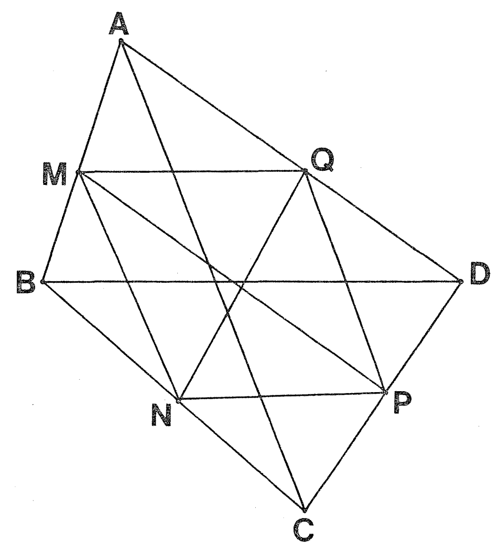
$$\sim A_r \wedge B_r \wedge \sim C_b \equiv v.$$

Donc, B est rouge. Supposons alors que A est noir et C, bleu. Encore une fois, aucun des énoncés a), b) et c) ne serait vrai. Il reste à conclure que A est bleu et C, noir.

Question 3

Sachant que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales vaut la somme des carrés des côtés, démontrez que la somme des carrés des diagonales d'un quadrilatère est double de la somme des carrés des segments qui joignent les milieux des côtés opposés.

Solution suggérée



Dans le quadrilatère ABCD, soient M, N, P et Q les points milieux des côtés. Il s'ensuit que la figure MNPQ est un parallélogramme. On peut donc, en s'appuyant sur le résultat qui accompagne l'énoncé du problème, affirmer que:

$$\overline{MN}^2 + \overline{NP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2 .$$

Comme les côtés du parallélogramme MNPQ valent la moitié de la diagonale à laquelle ces côtés sont parallèles, cette relation peut s'écrire:

$$2\left(\frac{\overline{AC}^2}{4} + \frac{\overline{BD}^2}{4}\right) = \overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2$$

ou

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2).$$

Question 4

Si $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ sont n angles, montrer que

$\sin^4\theta_1 + \cos^4\theta_1 + \sin^4\theta_2 + \cos^4\theta_2 + ... + \sin^4\theta_n + \cos^4\theta_n \geqslant n/2.$

Solution suggérée

On a:

$$\begin{aligned} 1 &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 \\ &= \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta \\ &= \sin^4\theta + \cos^4\theta + \tfrac{1}{2}(\sin 2\theta)^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - \tfrac{1}{2}(\sin 2\theta)^2$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n} (\sin^4\theta_i + \cos^4\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} (1 - \tfrac{1}{2}(\sin 2\theta_i)^2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\sin 2\theta_i)^2$$

$$= n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\sin 2\theta_i)^2.$$

Or, on sait que

$$(\sin 2\theta_i)^2 \leqslant 1$$

$$\text{donc, } \frac{1}{2}\sum_{i=1} (\sin 2\theta_i)^2 \leqslant \frac{n}{2}.$$

D'où, l'on tire

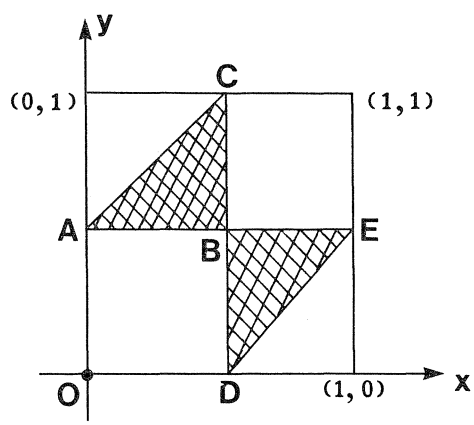
$$\sum_{i=1}^{n} (\sin^4\theta_i + \cos^4\theta_i) \geqslant n - \frac{n}{2}.$$

Question 5

Soit un bâton que l'on coupe en deux endroits choisis au hasard. Quelle est la probabilité que les trois tronçons puissent former un triangle?

Solution suggérée

Prenons la longueur du bâton comme unité et son extrémité gauche pour origine. Soient x et y les coordonnées des points où les coupures sont effectuées; x et y peuvent donc prendre une valeur arbitraire entre 0 et 1. Ce qui correspond à un point P quelconque situé dans un carré de côté unité et placé sur des axes rectangulaires X et Y.



Pour que les trois tronçons puissent former un triangle, il est nécessaire et suffisant qu'ils satisfassent à l'inégalité du triangle, c'est-à-dire que la somme de deux d'entre eux soit supérieure au troisième. Cette condition sera satisfaite si et seulement si la longueur de chaque tronçon est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Pour fixer les idées, supposons que l'on ait $x \leqslant y$. Alors il faudra que $x < \frac{1}{2}$, $y - x < \frac{1}{2}$ et $1 - y < \frac{1}{2}$. Chacune de ces inégalités définit une région dans le carré unité de la figure ci-dessus, et le triangle ABC est l'intersection de ces trois régions. Donc, dans le cas où $x \leqslant y$, un point P de coordonnées (x, y) correspondant à une brisure du bâton sera associé à un triangle si et seulement si P est situé dans ABC. De même, dans le cas où $y \leqslant x$, P sera associé à un triangle si et seulement s'il est situé dans la région BDE. On peut sans difficulté évaluer que la somme des aires de ABC et BDE est égale à $\frac{1}{4}$. Ce qui correspond à la probabilité recherchée.

Question 6

Pour un entier naturel n quelconque, évaluer la somme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \dots$$

où [x] désigne le plus grand entier plus petit ou égal à x.

Solution suggérée

Montrons d'abord que la somme est en fait finie, parce qu'à partir d'un certain rang les termes sont nuls. Supposons que k soit suffisamment grand pour que $n < 2^k$. On a alors

$$n + 2^k < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

donc

$$\frac{n+2^k}{2^{k+1}} < 1 \text{ et } \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = 0.$$

Montrons ensuite que, pour tout x, on a

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = [x] \quad (\dagger)$$

Supposons $2m \leqslant x < 2m+2$, où m est un entier quelconque.

Alors, $\quad m \leqslant \frac{x}{2} < m+1$ et $\left[\frac{x}{2}\right] = m.$

Si, d'une part, on avait $2m \leqslant x < 2m+1$, on conclurait que

$[x] = 2m$ et $\left[\frac{x+1}{2}\right] = m$; et si, d'autre part, on avait

$2m+1 \leqslant x < 2m+2,$

on conclurait que $[x] = 2m+1$ et $\left[\frac{x+1}{2}\right] = m+1.$

Cela établit l'égalité (†) que nous écrirons sous la forme

$$[x] - \left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right].$$

Posant x successivement égal à n, n/2, $n/2^2$, ..., nous obtiendrons

$$[n] - \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

$$\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2^2}\right] = \left[\frac{(n/2)+1}{2}\right] = \left[\frac{n+2}{2^2}\right]$$

$$\left[\frac{n}{2^2}\right] - \left[\frac{n}{2^3}\right] = \left[\frac{(n/2^2)+1}{2}\right] = \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\left[\frac{n}{2^k}\right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

Supposons k tel que $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, de sorte que l'on ait

$$\left[\frac{n}{2^k}\right] \neq 0 \text{ et } \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = 0.$$

Additionnant membre à membre ces égalités, nous aurons

$$[n] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

Puisque n est un entier, on a $[n] = n$, qui est la valeur de la somme cherchée.
