EXPLORATIONS MATHÉMATIQUES ASSISTÉES PAR ORDINATEUR

André Boileau,
professeur de mathématiques
et d'informatique, UQAM

Depuis quelques temps, dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, un peu tout le monde se pose la question suivante: comment pouvons-nous utiliser les micro-ordinateurs pour nous aider à enseigner les mathématiques à nos élèves?

Je vous avoue tout de suite que je n'essaierai pas de répondre à cette question dans toute sa généralité. Bien sûr, comme plusieurs, j'ai mon opinion là-dessus; mais je pense que l'heure n'est pas encore aux grandes théories englobantes, et qu'on doit encore faire passablement d'expérimentations avant de se laisser convaincre de quoi que ce soit en ce domaine. C'est pourquoi, dans cet article, je me contenterai de décrire un exemple d'application de l'ordinateur à l'enseignement des mathématiques qui me semble prometteur; et je vous inviterai ensuite à l'expérimenter vous-même, si le cœur vous en dit.

UN PEU DE RECUL

Avant d'entrer dans le vif du sujet, j'aimerais pourtant prendre un peu de recul et décrire le contexte général dans lequel je me situe.

D'abord une constatation: depuis la réforme des «mathématiques modernes», on a eu tendance à insister beaucoup trop sur la rigueur, au détriment de l'intuition, dans l'enseignement des mathématiques. Or, ces deux aspects de la pratique des mathématiques sont indissociables: sans intuition, la rigueur perd tout son sens et ne peut que prendre le visage d'un formalisme insignifiant, qu'on ne peut comprendre parce que coupé de son expérience. La rigueur dégénère alors souvent en un apprentissage par cœur de trucs et de recettes.

Il est urgent de rendre à l'intuition la place qui lui est due. C'est vite dit, mais comment faire?... Des recherches en cours à l'UQAM *(avec M. Bolduc, L. Charbonneau, C. de Flandre et J.-B. Lapalme)* nous portent à croire que, pour favoriser le développement de l'intuition d'un concept mathématique chez un individu, on doit le placer dans un environnement possédant les caractéristiques suivantes:

i) Il doit avoir la possibilité d'observer des exemples *(ainsi que des contre-exemples)* nombreux et variés du concept en question: de la sorte, il doit pouvoir se faire une idée de la totalité des exemples possibles de ce concept.

ii) Il doit aussi pouvoir agir sur ces exemples, de façon à pouvoir vérifier la justesse de ses hypothèses de structuration *(classification, caractérisations, etc.)* de l'ensemble des possibles.

iii) Enfin, tout le processus a avantage à être visuel *(vaut mieux voir un exemple que de le voir décrit),* dynamique *(vaut mieux le voir se construire que de le voir achevé),* direct *(vaut mieux pouvoir pointer ce qui nous intéresse que d'avoir à passer par une description)* et interactif *(pouvoir demander un exemple particulier, et l'obtenir).*

Pour clarifier tout ceci, considérons un cas analogue: l'apprentissage de la langue maternelle. Quand nous montrons à parler aux jeunes enfants, nous ne tentons pas de définir les mots comme dans un dictionnaire. Par exemple, nous ne décrivons pas ce qu'est une chaise en disant qu'il s'agit d'un meuble sur lequel nous pouvons nous asseoir, qui a un dossier, etc. On procède plutôt comme suit: nous pointons divers objets en les nommant *(«ça c'est une chaise», ça c'est un fauteuil»)* et nous corrigeons l'enfant qui essaie de nous imiter *(«oui c'est une chaise», «non, ça c'est un fauteuil»),* en donnant parfois quelques explications *(«ce n'est pas une chaise, c'est un fauteuil: tu vois, il a des bras»).* Il ne faut pas croire que cette façon de faire ne fonctionne que pour les mots concrets comme «chaise». Pour des mots abstraits comme «liberté», nous commençons par associer la qualité correspondante *(«être libre»)* à divers exemples non pas d'objets concrets mais de situations, de récits, d'emplois *(par exemple: «À sa sortie de prison, il était enfin libre d'aller et venir à sa guise...»).*

Cette façon de procéder se retrouve à l'état embryonnaire quand un professeur de mathématiques donne un ou deux exemples avant de définir un concept. Mais il est très rare que l'élève soit invité à participer réellement à cette phase exploratoire; on passe tout de suite aux «choses sérieuses, abstraites, donc éducatives»: la manipulation des symboles. C'est dommage, car non seulement l'élève peut apprendre beaucoup de telles activités d'exploration, mais plus encore elles sont peut-être essentielles pour constituer cette base intuitive nécessaire à l'élaboration d'habiletés mathématiques véritables.

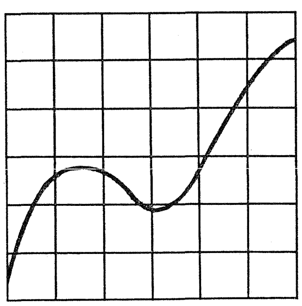
Dans ce qui va suivre, nous décrirons quelques exemples d'explorations mathématiques. Et nous verrons que l'ordinateur est susceptible de faciliter grandement la construction et la manipulation des représentations que nous nous faisons des objets et des situations mathématiques.

UN OUTIL D'EXPLORATION

Pour illustrer nos propos, nous allons considérer le cas des fonctions réelles à une variable, et plus particulièrement le passage des descriptions algébriques *(de la forme y = f(x))* aux descriptions géométriques (les graphes des fonctions). L'idée de base est d'utiliser comme outil d'exploration un programme qui tracera le graphe de toute fonction dont on aura donné la description y = f(x).

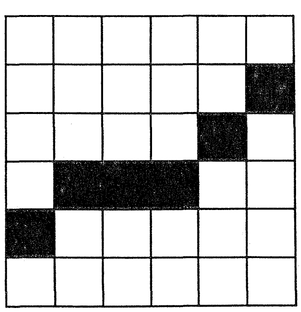
Une remarque importante avant de poursuivre: le graphe d'une fonction de ℝ dans ℝ est un objet mathématique infini, et ce dans deux sens différents. D'une part, il n'est pas borné dans le plan *(le domaine va de* $-\infty$ *à* $+\infty$*)* et d'autre part, même quand on se restreint à un intervalle borné, le nombre des points qui le composent est infini. Nous ferons face à ces problèmes d'une part en nous restreignant à un intervalle borné *(spécifié par l'utilisateur)* et d'autre part en utilisant des approximations finies. En effet, on peut comparer l'écran graphique de l'ordinateur à une grille rectangulaire de petites lumières *(le terme technique est «pixels»)* que l'on peut allumer ou éteindre individuellement. Comme il n'y a qu'un nombre fini de lumières, on ne peut songer à représenter, avec une exactitude absolue, même une portion du plan cartésien. C'est ainsi que le graphe de la fonction de la *figure 1a* sera *«approximé»* par les points de la *figure 1b.* Mais ne nous laissons pas décourager par cette illustration caricaturale: en réalité, les pixels sont beaucoup plus petits et les approximations obtenues sont souvent très acceptables *(voir figure 2).*

Figure 1a



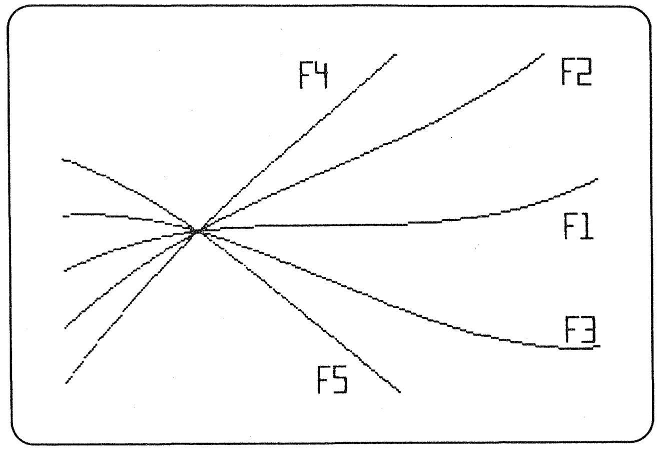
Le graphe d'une fonction...

Figure 1b



... et son approximation sur l'écran d'un ordinateur, tel que vu à la loupe.

Figure 2



Étude de la famille de courbes $x^3 + a (x + 1)$

ÉCRAN 1

DOM. = [-2, 2]
IMAGE = [-30, 30]

F1 = X ^ 3
F2 = X ^ 3 + 10 * (X + 1)
F3 = X ^ 3 - 10 * (X + 1)
F4 = X ^ 3 + 20 * (X + 1)
F5 = X ^ 3 - 20 * (X + 1)

Décrivons maintenant ce que notre programme-outil nous permet de faire (voir aussi la *figure 3* où l'on peut voir le «menu» affiché par le programme):

Figure 3

Le menu principal de notre programme.

COMMANDES DISPONIBLES:
F) DÉFINITION DE FONCTION
F1 (X) =
F2 (X) =
F3 (X) =
F4 (X) =

D) SPÉCIFIER LE DOMAINE
I) SPÉCIFIER L'IMAGE
T) TRACER DES FONCTIONS
P) RELIER POSITIONS-COORDONNÉES
Z) FAIRE UN ZOOM
E) EFFACER
Q) QUITTER

COMMUTATEURS D'ÉCRANS
ESCAPE) TEXTE <- -> GRAPHIQUE
ESPACE) ÉCRAN 1 <- -> ÉCRAN 2

COMMANDE:

ÉCRAN 1

DOM. = [0, 0]
IMAGE = [0, 0]

1. Nous pouvons définir jusqu'à huit fonctions. Comme c'est souvent le cas lorsqu'on communique avec un ordinateur, ces fonctions doivent être décrites dans un certain format: par exemple, on doit écrire 2 * X plutôt que 2x, X ^ 2 plutôt que x^2 et SIN (X) plutôt que sin x. On doit utiliser la variable X et on peut utiliser les constantes E et PI, ainsi que les fonctions SIN, COS, TAN, ATN *(arctangente)*, ABS *(valeur absolue)*, SQR *(racine carrée)*, EXP *(exponentielle base e)*, LOG *(logarithme base e)*, etc. *(En fait, pour ceux qui connaissent un peu le langage de programmation BASIC, on peut utiliser toute expression correcte en BASIC).*

2. Nous pouvons spécifier la portion du plan qui nous sera montrée à l'écran, c'est-à-dire en quelque sorte notre fenêtre sur le plan. Comme on l'a souligné précédemment, il est impossible de représenter fidèlement un plan infini sur un écran fini. On devra donc spécifier la fenêtre voulue par deux intervalles (un pour le domaine et un pour l'image). Chaque borne d'intervalle pourra être un nombre *(entier ou décimal)* ou une expression constante *(comme SQR(2) ou PI/2)*. En fait, on pourra spécifier de la sorte non pas une seule mais bien deux fenêtres sur le plan. Chaque fenêtre pourra ensuite être vue sur l'écran de l'ordinateur: ceci s'avère très utile pour fins de comparaison.

3. Nous pouvons tracer une ou plusieurs fonctions dans l'une ou l'autre des deux fenêtres disponibles.

4. Nous pouvons spécifier des coordonnées (via deux nombres ou expressions constantes) et faire apparaître une mire centrée sur le point correspondant d'une des fenêtres sur le plan. Réciproquement, nous pouvons promener notre mire en nous servant de manettes *(semblables à celles utilisées pour les jeux vidéo)* et voir s'afficher de façon dynamique les coordonnées correspondantes.

   Une note en passant: le programme ne trace aucun système d'axes à l'écran. En fait, j'ai voulu tenir compte des possibilités nouvelles offertes par l'ordinateur et j'ai remplacé les systèmes d'axes par la mire mobile que je viens de décrire: à mon avis, nous obtenons ainsi un instrument supérieur.

5. Nous pouvons aussi commander un «ZOOM IN» par rapport à une fenêtre, c'est-à-dire que nous pouvons agrandir une partie d'une fenêtre, un peu comme si nous prenions une loupe pour «nous approcher un peu». Nous procédons comme suit: à l'aide des manettes, nous déterminons sur une des fenêtres une région rectangulaire, qui est ensuite redessinée en plus grand sur l'autre fenêtre.

   Remarquons ici que, bien que le même *résultat* puisse être atteint en redéfinissant la deuxième fenêtre par ses coordonnées, le processus mis en cause est fondalement différent: par des rotations des boutons de nos manettes, l'observation à l'écran des effets produits aidant, nous arrivons à définir notre fenêtre, qui est somme toute un objet mathématique abstrait.

6. Nous pouvons enfin commander un «ZOOM OUT», c'est-à-dire que nous pouvons incorporer une copie réduite d'une fenêtre dans une fenêtre plus grande. C'est en somme l'inverse de 5.

La description précédente est incomplète et très succincte: il faut vraiment voir le programme fonctionner pour comprendre véritablement de quoi il s'agit. Aussi ai-je décidé de le mettre gratuitement à votre disposition. Précisons que le programme fonctionne sur un ordinateur Apple II + (64K) ou Apple IIe muni de manettes de jeu *(«paddles»)*. Les personnes intéressées à en obtenir un exemplaire n'ont qu'à envoyer 6,00 $ *(pour couvrir les matériaux, la manutention et le transport)* à l'A.M.Q.

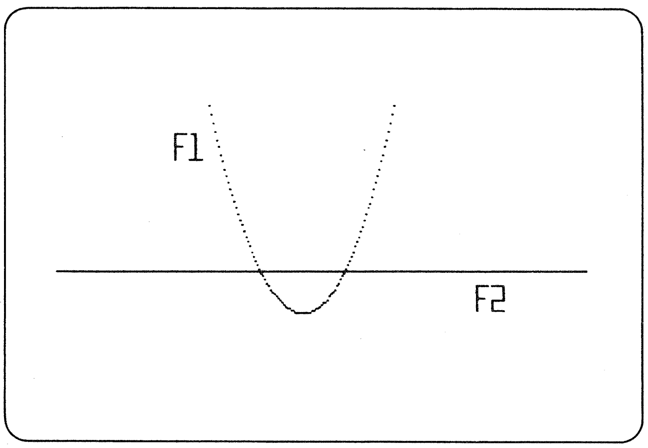
QUELQUES IDÉES D'EXPLORATIONS

Avant de parler d'explorations rendues possibles *(ou à tout le moins facilitées)* par notre programme-outil, il serait bon de revenir un peu sur le concept même d'exploration. Une *exploration* suppose une *observation* visant à la *découverte* de quelque chose. Cela suppose d'une part que l'explorateur ait assez d'expérience pour savoir en gros quoi observer et comment, et d'autre part qu'il lui reste encore des choses à découvrir dans le domaine en question. Il est important de garder en mémoire ces quelques remarques, de façon à pouvoir bien évaluer l'intérêt des diverses explorations suggérées plus loin, que ce soit pour nous ou pour nos élèves.

Supposons que, pour une raison ou pour une autre, on veuille résoudre l'équation $2x^2 + 3x - 4 = 0$ et qu'on ne connaisse pas la célèbre formule qui nous donne les solutions, on peut toujours essayer de tracer les graphes des fonctions $y = 2x^2 + 3x - 4$ et $y = 0$ et de chercher les points d'intersection. Mais comment choisir notre fenêtre d'observation? On peut bien sûr la choisir au hasard, en espérant que tous les zéros se retrouveront dans celle-ci. On peut encore chercher à être un peu plus systématique et essayer plusieurs fenêtres. Si on sait qu'une équation de degré deux a au plus deux racines, ou qu'une courbe de degré deux a la forme d'un U *(peut-être renversé)* plus ou moins évasé, on saura après avoir trouvé deux racines qu'il est inutile de chercher plus loin. Ou peut-être cherche-t-on une racine particulière qu'on pourra reconnaître *(dans le cas d'un problème à contexte menant à notre équation)?*

Choisissons donc la fenêtre [-10,10] × [-20,20], quitte à la changer si ça semble nécessaire, et traçons nos fonctions *(figure 4a)*. On constate *tout de suite* l'existence de deux zéros, et on peut se servir de la mire mobile pour en obtenir une première approximation *(figure 4b)*. On peut aussi spécifier une portion de la fenêtre *(figure 4c)* et obtenir un agrandissement *(figure 4d)* sur lequel on pourra, toujours avec la mire mobile, obtenir une meilleure approximation d'une des racines. Et si l'on n'obtient pas la précision recherchée, on peut toujours faire un ou plusieurs autres agrandissements *(figure 4e)*. De cette façon, on *découvre par observation* les zéros de notre fonction.

Figure 4a



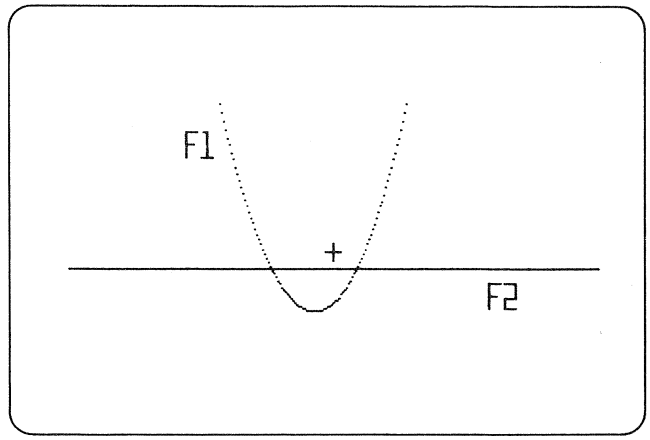
Diverses étapes d'une recherche visuelle des racines d'une fonction. On trace la fonction et l'axe des x.

ÉCRAN 1

DOM. = [-10, 10]
IMAGE = [-20, 20]

F1 = 2 * (X ^ 2) + 3 * X - 4
F2 = 0

Figure 4b

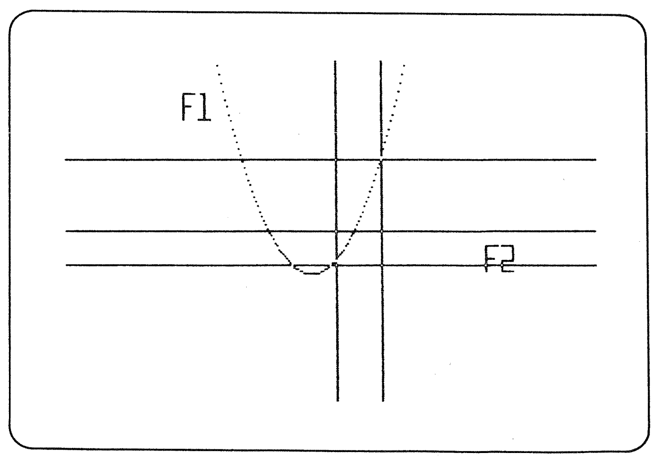


À l'aide de la mire, on obtient une première approximation. (La mire est la petite figure en forme de croix qui est commandée par les manettes de jeu de l'ordinateur et dont les coordonnées sont affichées en bas.)

ÉCRAN 1

DOM. = [-10, 10]
IMAGE = [-20, 20]
[X, Y] = [0, 2]
F1 = 2 * (X ^ 2) + 3 * X - 4
F2 = 0

Figure 4c

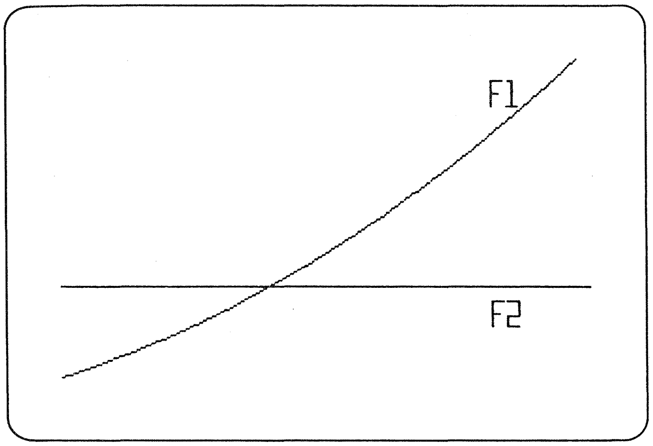


On spécifie une région à agrandir...

ÉCRAN 1

DOM. = [-10, 10]
IMAGE = [-20, 20]
F1 = 2 * (X ^ 2) + 3 * X - 4
F2 = 0

Figure 4d



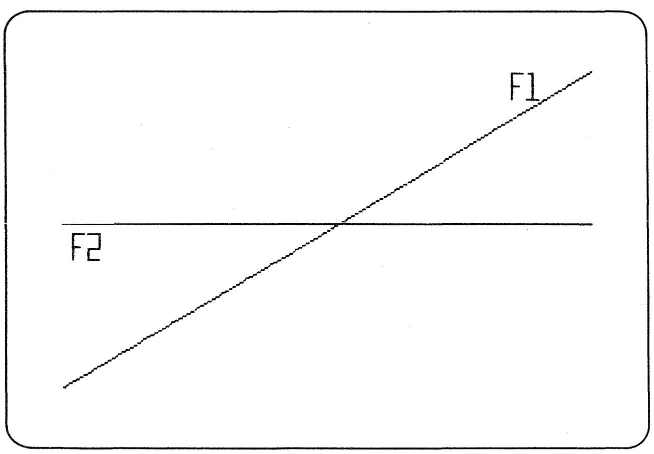
... et l'agrandissement est réalisé.

ÉCRAN 2

DOM. = [.179211469, 1.89964158]
IMAGE = [- 4.1509434, 8.42767296]

F1 = 2 * (X ^ 2) + 3 * X - 4
F2 = 0

Figure 4e



Au bout de trois agrandissements, on obtient une bonne idée de la racine en question. (On peut utiliser la mire pour plus de précision).

ÉCRAN 2

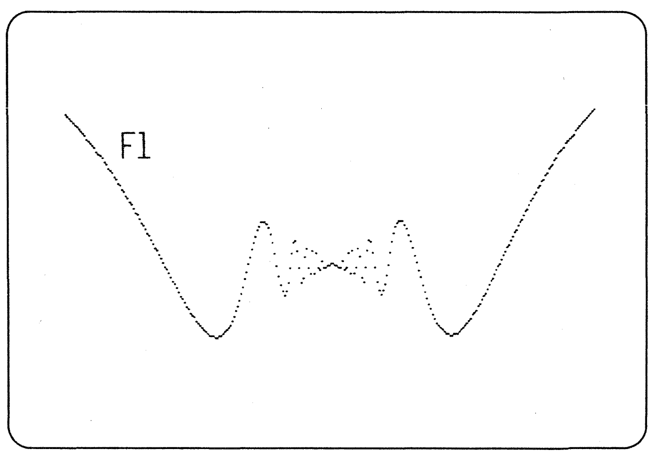
DOM. = [.848389182, .853008468]
IMAGE = [-.0157873323, .0155584543]
F1 = 2 * (X ^ 2) + 3 * X - 4
DF2 = 0

Soulignons qu'on peut, de la même façon, trouver les racines d'équations plus compliquées *(x^3 + cos (x) - 4 = 0 par exemple),* les points d'intersection de deux courbes *(comme y = e^x - 1 et y = cos (x)),* ou les points spéciaux *(minimums, maximums, points d'inflexion, etc.)* d'une fonction. Cette activité de recherche visuelle est sans doute très riche, mais on ne doit pas croire qu'elle doive toujours remplacer les autres méthodes: d'une part, elle exige pas mal de temps et ne donne que des solutions approximatives, mais elle permet d'autre part de faire provision d'une variété d'images qui iront enrichir l'expérience mathématique de son utilisateur.

Une autre idée d'exploration consiste à utiliser ce programme pour étudier l'effet des paramètres dans une famille de courbes. Par exemple, on peut étudier ce qui se passe lorsqu'on fait varier les paramètres *a* et *b* dans les familles de courbes suivantes: y = ax + b, y = sin (ax + b) ou y = x^3 + ax + b *(voir figure 3 pour le cas où a = b).*

On peut aussi songer à des explorations demandant un peu plus de connaissances mathématiques: étudier le comportement de certaines fonctions en des points singuliers *(figure 5),* se convaincre de la pertinence de la notion de différentielle en constatant que des agrandissements successifs ont pour effet de rendre certaines fonctions presque linéaires *(figure 4e),* visualiser comment certaines séries infinies *(de Taylor, de Fourier,...)* convergent en examinant plusieurs séries partielles *(figure 6),* etc.

Figure 5



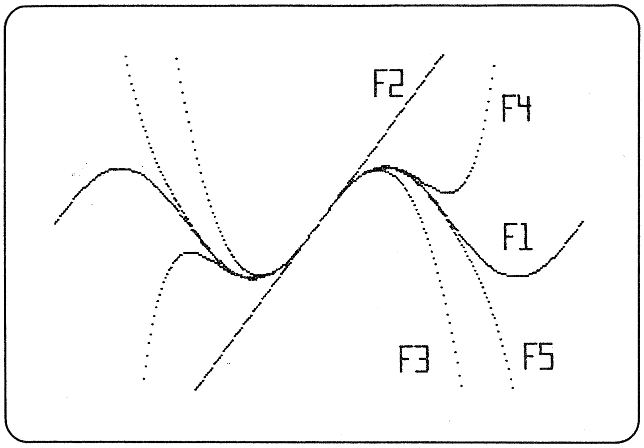
Étude graphique de la fonction x sin (1/x) au voisinage du point 0.

ÉCRAN 1

DOM. = [- .5, .5]
IMAGE = [- .5, .5]

F1 = X * SIN (1/X)

Figure 6



Étude graphique de la convergence de la série Taylor de la fonction sin (x) autour du point 0. Que remarquez-vous?

ÉCRAN 1

DOM. = [-6.28318531, 6.28318531]
IMAGE = [-3, 3]

F1 = SIN (X)
F2 = X
F3 = X - (X ^ 3)/6
F4 = X - (X ^ 3)/6 + (X ^ 5)/120
F5 = FN F4 (X) - (X ^ 7)/5040

Je pourrais encore continuer de décrire des idées d'explorations assistées par ce programme, mais je vais m'arrêter ici, car je crois qu'il est préférable que vous expérimentiez vous-mêmes, selon vos goûts et vos besoins. Je me permets tout de même une suggestion: plutôt que de vous demander: «Qu'est-ce que je peux faire avec ce programme?», commencez d'abord par vous poser la question: «Y a-t-il des choses que j'ai toujours voulues faire et qui sont facilitées ou rendues possibles par ce programme?». Non pas qu'il soit exclu que ce programme vous donne de bonnes idées, mais il me semble toujours préférable de partir de besoins ressentis antérieurement à toute «publicité».

EN CONCLUSION

Disons-le bien fort: je ne prétends pas donner ici un exemple parfait d'une application pédagogique de l'ordinateur à l'enseignement des mathématiques. Le logiciel en est présentement à la version 3.1 et peut encore être amélioré sous plusieurs rapports. Il n'a pas encore été suffisamment expérimenté pour tirer des conclusions sérieuses quant à son efficacité pédagogique. Mais je crois qu'il a été bâti sur des assises pédagogiques valides et qu'il est susceptible, tout imparfait qu'il soit, de contribuer à développer l'intuition mathématique de ceux qui l'utilisent.

Je voudrais aussi faire une mise en garde: ce programme est un outil passablement général, et par conséquent demande une certaine sophistication de la part de l'utilisateur qui voudrait en utiliser toutes les possibilités: il permet, par exemple, de tracer sur le même écran plusieurs fonctions de domaines et images différents, ce qui peut être utile quand c'est fait volontairement. Il faut donc que le professeur qui prévoit le faire utiliser par ses élèves s'attende à consacrer un certain temps pour corriger les erreurs d'utilisation: la situation est en fait assez semblable à l'apprentissage du mode d'emploi d'une calculatrice.

Comment utiliser ce programme en classe? Je suggère que le professeur commence par l'utiliser lui-même, pour se familiariser avec son fonctionnement et surtout pour découvrir les plaisirs et les écueils de l'exploration en mathématiques. Il pourrait aussi l'utiliser devant la classe, à la façon d'un tableau électronique. Mais je souhaite qu'il donne à ses élèves la possibilité de mener eux-mêmes leurs propres explorations. Étant donné le peu d'habitude qu'ont ceux-ci de telles activités, les premières explorations devront vraisemblablement être étroitement encadrées. Mais il n'est pas exclu que certains d'entre eux en viennent à utiliser le programme sans autre guide que leur curiosité.

Je suis convaincu qu'il est essentiel de développer l'intuition mathématique chez nos élèves, et je suis persuadé que les activités d'exploration que je viens de décrire peuvent contribuer à y arriver. Mais il ne faudrait pas non plus en faire une panacée au point de négliger les autres aspects de la formation mathématique, dont le développement d'une rigueur bien comprise, source de compréhension et non de formalisme. Rappelons-nous la comparaison de G. Polya: la mathématique est semblable à une automobile dont le moteur serait l'intuition et dont les freins seraient la rigueur. Une auto sans moteur est bien sûr inutile, mais une auto sans freins est inutilisable!

UNE AUBAINE!

Procurez-vous un exemplaire de la disquette proposée dans l'article en envoyant un chèque de 6,00 $ (à l'ordre de l'AMQ) à l'adresse suivante:

Explorations mathématiques
a/s M. André Boileau
Secrétariat de l'AMQ
C.P. 247
Montréal-Nord H1H 5L2