Chronique : *HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES*

Louis Charbonneau, UQAM

PROGRESSION ARITHMÉTIQUE et PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

Dans le dernier *Bulletin* (mai 1983), j'avais sollicité votre participation à cette chronique en vous invitant à me faire parvenir vos questions. Eh bien, chers lecteurs, je ne peux dire que je fus submergé par vos lettres. Néanmoins, l'un d'entre vous, de Rimouski, m'a écrit une charmante lettre à laquelle je réponds avec d'autant plus de plaisir, qu'au départ, je n'étais pas certain de pouvoir me montrer à la hauteur de la simplicité de la question. Il n'y a aucune honte à avouer son ignorance, surtout face à son *premier* correspondant.

Voici la question : « ...J'en profite pour vous demander des renseignements sur l'origine des appellations *progression arithmétique* et *progression géométrique*. Je me demande quand, par qui et pour quelles raisons on a choisi ces noms. »

En effet, pourquoi ce mot *progression* ? En quoi la progression géométrique est-elle plus géométrique que la progression arithmétique ?

PROGRESSION

Le terme se rencontre pour la première fois dans le *De Institutione Arithmetica* écrit vers 510 après Jésus-Christ par Boetius, un auteur latin de la toute fin de l'Empire romain d'Occident. Ce livre est en fait un manuel d'arithmétique où se trouve condensé l'ensemble des connaissances arithmétiques qu'avaient les Grecs. D'ailleurs l'auteur, dont les livres seront à la base de l'enseignement des mathématiques pour presque mille ans, n'y est pas totalement original en ce qu'il s'est fortement inspiré, en agissant davantage en traducteur qu'en auteur, de l'*Introduction à l'arithmétique* de Nicomaque de Gérase, auteur grec du deuxième siècle après Jésus-Christ. Boetius fait le lien entre l'arithmétique grecque et les érudits du Moyen-Âge occidental.

En parcourant le texte de Boetius (que je n'ai pu consulter, pour mon grand malheur, que sous sa forme originale latine[1]), on se rend vite compte que le terme *progressio* n'est pas le seul à signifier suite ou série. Les mots *dispositio* et *proportio* prennent parfois aussi ce sens. L'ambiguïté du terme *proportio*, qui signifie aussi proportion et rapport, demeurera au moins jusqu'au XVI^{e} siècle[2] ; ce terme était utilisé auparavant chez les Grecs[3]. Mais l'importance des proportions dans les mathématiques obligea les mathématiciens à choisir un autre mot pour suite ou série. Quant au mot *dispositio*, qui signifie aussi ordre ou arrangement, il ne semble pas avoir été repris par la suite. Le mot progression, la francisation de *progressio*, fut peu à peu remplacé par les mots suite et série, au cours du XVII^{e} siècle[4]. Cependant, les expressions *progression arithmétique* et *progression géométrique* restèrent en usage jusqu'à nos jours. Cette résistance du mot progression à l'intérieur de ces expressions illustre, selon moi, l'inertie de toute connaissance scolaire. L'étude de ces progressions faisait partie de tout programme de mathématiques et ce, jusqu'à ces dernières décennies. Cette tradition remonte à la fin du Moyen-Âge et au début de la Renaissance alors que le mot progression avait encore un sens en soi[5]. Puisque seuls ces deux types de progression faisaient l'objet d'étude et que les mathématiques de pointe se séparèrent rapidement par la suite des mathématiques scolaires, ces expressions perdurèrent dans l'isolement de l'école.

Tout cela est bien beau, mais on peut maintenant se demander pourquoi Boetius choisit le mot *progressio*. Il ne s'agit pas ici d'une traduction du mot εκθεσις que les Grecs employaient pour *suite*. Ce mot signifie littéralement se débarrasser de quelque chose en le vendant, alors que *progressio* veut plutôt dire, selon mon petit dictionnaire de collège, action d'avancer, progrès, avancement, développement. Boetius s'est donc attaché à la façon dont sont générées les suites. D'ailleurs, il écrit souvent que les nombres de la suite progressent...

PROGRESSION ARITHMÉTIQUE, PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

Nous avons vu que le terme *proportio* avait souvent le même sens que *progressio*. La citation suivante, de Nicomaque de Gérase (l'an 150 après Jésus-Christ), illustre ce fait :

> « C'est une proportion arithmétique, alors, lorsque trois termes ou plus sont placés à la suite les uns des autres, et sont ainsi choisis, et la même différence quantitative se trouve à exister entre des nombres successifs, mais non le même rapport entre les termes, l'un à l'autre. Par exemple, 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11,12,13 ; car, dans cette suite naturelle (ici Boetius traduit par *in hac enim naturalis numeri dispositione*), examinée à la suite et sans omission, chaque terme se trouve placé entre deux autres et préserve la proportion arithmétique entre eux. (...) »[6]

Cette ambiguïté se répète, entre autres, lorsque Nicomaque étudie les progressions géométriques. Pour comprendre pourquoi il y a ainsi multiplicité de sens, il faut se rappeler que si, pour nous, les mots proportion et rapport sont équivalents, il n'en était pas ainsi pour les Grecs. Ceux-ci avaient, au temps de Nicomaque, dix types différents de proportions. Les deux plus anciennes, dont l'origine remonte au-delà de l'époque de Pythagore (vers 550 avant Jésus-Christ), sont justement les proportions arithmétiques et géométriques. Il y a proportion arithmétique entre quatre nombres a, b, c et d si $b - a = d - c$. On voit ici qu'il ne s'agit pas d'un rapport. Il y a proportion géométrique entre quatre nombres a, b, c et d si $a/b = c/d$. De ces proportions découlent deux types de moyennes (en grec μεσοτης, en latin de Boetius, *medietas*) : moyenne arithmétique et moyenne géométrique.

Qu'est-ce qu'une moyenne arithmétique ? Platon nous le dit dans son *Timée*. Étant donnés trois nombres, le second sera une « médiété » arithmétique si elle « surpasse les extrêmes d'une quantité égale à celle dont elle est elle-même surpassée » [7]. Pour les nombres a, b et c, en notation symbolique, b est moyenne arithmétique si $b - a = c - b$. Autrement dit, a, b et c forment une proportion arithmétique. On voit, en relisant la citation de Nicomaque, le lien existant entre proportion, moyenne et progression arithmétique. Une progression arithmétique est une suite dont les éléments sont la moyenne arithmétique des éléments qui l'encadrent immédiatement.

La moyenne géométrique se définit de façon similaire. La moyenne géométrique de a et c sera b tel que $a/b = b/c$ ou, selon Platon, « ce que le premier est par rapport à lui, que ce moyen lui-même le soit par rapport au dernier » [8]. Une progression géométrique est donc une suite dont les éléments sont la moyenne géométrique des éléments qui l'encadrent immédiatement. La terminologie de cette moyenne varie dans les textes grecs selon que c'est un texte de géométrie, où l'on parle de moyenne proportionnelle, ou un texte d'arithmétique ou de musique, où l'on parle plutôt de moyenne géométrique.

Abordons maintenant la question du choix des mots *arithmétique* et *géométrique*. Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'étude des proportions remonte au moins aux Pythagoriciens. En fait, selon les auteurs grecs de l'époque hellénistique (de 320 avant Jésus-Christ à 300 après Jésus-Christ), dont Proclus de Lycie, Iamblichus, Nicomaque de Gérase, les termes *arithmétique* et *géométrique* sont aussi de cette époque. Ils n'en expliquent toutefois pas le choix. Aussi, afin d'émettre une hypothèse plausible, voyons comment les Pythagoriciens subdivisaient les mathématiques. [9]

D'abord, il faut mentionner que les Pythagoriciens concevaient deux types de « choses » faisant l'objet d'étude mathématique : les quantités (en fait les nombres naturels), et les grandeurs (choses mesurables et/ou ayant des propriétés permettant des comparaisons ; par exemple les segments de droite et les nombres fractionnaires). Ces deux objets se différencient par le fait que la quantité n'est pas divisible au-delà de l'unité et que la grandeur peut être divisée, mais les Pythagoriciens ne savaient pas exactement où s'arrête la divisibilité. [10] Étant donné cela, les mathématiques se composent de quatre secteurs : l'arithmétique étudie les quantités en tant que telles, la musique étudie les relations entre les quantités, la géométrie étudie les grandeurs au repos et l'astronomie étudie les grandeurs en mouvement. Dans ce contexte, le choix des termes *arithmétique* et *géométrique* ne surprend plus. En effet, la proportion arithmétique ne porte, et ne peut porter, que sur des quantités. L'opération de soustraction impliquée dans cette proportion est essentiellement arithmétique car, partant de trois nombres naturels placés en ordre croissant, la vérification de la proportionnalité demeure dans le domaine des nombres naturels. Il en va tout autrement pour la proportionnalité géométrique qui, pour être vérifiée, nécessite habituellement de sortir du cadre alors restreint des nombres naturels. La quantité ne suffit plus. On a besoin de considérations sur les grandeurs. D'où le choix du terme *géométrique*. Par suite de la grande influence de la philosophie et des mathématiques pythagoriciennes tout au long de l'histoire intellectuelle de la civilisation grecque, il apparaît normal d'y voir survivre la terminologie pythagoricienne, même si, en fait, la division pythagoricienne évolua et se modifia. Ajoutons, en terminant, que l'étude des progressions se fit très souvent dans le cadre de la musique... qui étudie les relations entre les quantités. Une proportion au sens grec n'est-elle pas ce que nous appelons une relation au sens ordinaire, non mathématique, du mot ?

◇ ◇ ◇

Dans le prochain numéro du *Bulletin*, je reviendrai au Québec pour parler de l'abbé Jérôme Demers qui, au début du XIX^e siècle, enseigna et fut directeur au séminaire de Québec. D'ici là, j'attends vos questions et vos lettres à l'adresse suivante :

Louis Charbonneau
Dép. de mathématiques et d'informatique
U.Q.A.M.
C.P. 8888, Succ. A
Montréal, Qué.
H3C 3P8

1. Texte édité par G. Friedlein en 1867. Voir la bibliographie.
2. Smith, tome II, p. 481.
3. Voir la citation plus bas dans le texte.

4. Smith, tome II, p. 497.
5. Chuquet écrivait en 1484: «Et doit-on savoir que progression se fait en plusieurs et diverses manières». Cité dans Smith, tome II, p. 496, note 1.
6. Traduction libre d'une traduction en anglais. Il s'agit du début du chapitre XXIII du livre II. Voir la bibliographie.
7. Platon, *Timée* 36a.
8. Platon, *Timée* 32a.
9. Je me base ici sur le Prologue, partie II, des *Commentaires...* de Proclus de Lycie.
10. Je ne discute pas ici du lien entre la vision atomiste des Pythagoriciens et leur conception des grandeurs. Je ne le crois pas nécessaire à mon propos.

BIBLIOGRAPHIE

BOETIUS. *De Institutione Arithmetica; De Institutione Musica.* Édité par G. Friedlein, Leipzig, 1867, réimpression Frankfurt, 1966.

NICOMACHUS OF GERASA. *Introduction to Arithmetic,* traduction de M. L. D'Ooge, avec des études sur l'arithmétique grecque par F.E. Robbins et L.C. Karpinski, New York 1926, réimpression New York 1972.

PLATON. *Oeuvres complètes*, Tome X, *Timée, Critias*, traduction de A. Rivaud, Éditions Belles-Lettres, Paris 1963.

PROCLUS DE LYCIE. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Traduction de G.R. Morrow, Princeton Un. Pr. 1970.

SMITH, D.E. *History of Mathematics*, Tome II, New York 1925, réimpression Dover 1958.

Figure ci-contre: Illustration tirée du *Margarita Philosophica* de Gregor Reisch (1503). À la droite de la personnification de l'arithmétique se trouve Boetius alors qu'à sa gauche, Pythagore calcule sur sa table à calculer. Notez les deux progressions géométriques sur la robe de l'Arithmétique (1-2-4-8 et 1-3-9-27).

RECTIFICATION

Dans l'éditorial du dernier *Bulletin de l'AMQ* (mai 1983) où nous dressions la liste des directeurs successifs du *Bulletin*, nous avons commis le regrettable oubli que voici:

> *M. Claude Gaulin (Université Laval) a été directeur du Bulletin de l'AMQ pendant trois ans: soit de 1968 à 1971.*

Toutes nos excuses à M. Gaulin.

Jean-Marie Labrie (directeur du Bulletin)