CONCOURS DE L'AMQ 1983 *(niveau secondaire)*

Liste de lauréats — Questions et solutions

Nombre de participants : **866** ***Moyenne :*** **16,7 (sur 63)**

LES 37 PREMIERS LAURÉATS

1er	BÉDARD François	École secondaire Pont-Viau, Laval
2e	LECONG Philippe	Petit Séminaire de Québec
3e	PIOTTE Martin	Collège des Eudistes, Montréal
4e	WARREN Eyk	Collège St-Charles-Garnier, Québec
5e	BEAUCHEMIN Christian	Collège St-Alexandre, Touraine
6e	DONAVAN Mike	Séminaire St-Georges, St-Georges-de-Beauce
7e	BARIBAULT Robert	Collège St-Charles-Garnier, Québec
7e	PARENTEAU Marc	Séminaire St-François, Cap-Rouge
7e	GAGNON Alain	Séminaire du Verbe Divin, Granby
10e	DUMOULIN Serge	Collège des Eudistes, Montréal
10e	GAUTHIER Marie-Paûle	Collège des Eudistes, Montréal
12e	FORGET Jocelyn	Collège St-Charles-Garnier, Québec
12e	BELLEVILLE Patrice	Collège des Eudistes, Montréal
14e	PARENT Marc-Antoine	Collège Mont-St-Louis, Montréal
14e	ARCAND Jean-François	École secondaire St-Joseph, Pointe-du-Lac
14e	FLAMAND Stéphane	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
14e	LEBLANC Guy	Séminaire de Joliette, Joliette
18e	LUPIEN Stéphane	Collège de L'Assomption, L'Assomption
18e	MARTIN Charles	Séminaire de Joliette, Joliette
20e	TESSIER Pascal	Collège des Eudistes, Montréal
20e	FOREST Robert	Séminaire de Joliette, Joliette
22e	LIZOTTE Nathalie	École des Ursulines, Québec
22e	LAMBERT Christine	École secondaire Marie-Rose, Montréal
22e	LAFFITTE Vincent	Collège Notre-Dame, Montréal
22e	BEGIN Nathalie	Collège Sacré-Coeur, Sherbrooke
22e	BAILLARGEON Jean-Martin	Collège de L'Assomption, L'Assomption
22e	NOLET Philippe	École secondaire Sophie-Barat, Montréal
22e	MATHIEU Roger	École secondaire M.S.C., Beauport
29e	PROULX Jean	Collège St-Charles-Garnier, Québec
29e	LEPAGE Christiane	Collège de L'Assomption, L'Assomption
29e	ALLAIRE Catherine	Collège Durocher, St-Lambert
29e	BOIES Vaughn	École secondaire Jean XXIII, Dorval
33e	BERGERON Nicolas	Collège Notre-Dame, Montréal
33e	BERGERON Alain	Petit Séminaire de Québec, Québec
33e	LEFEBVRE Daniel	Polyvalente des Sources, Dollard-des-Ormeaux
33e	BRUNET Sylvain	Polyvalente des Sources, Dollard-des-Ormeaux
33e	MADONE Renée	École secondaire M.S.C., Beauport

CLASSIFICATION GÉNÉRALE DES PARTICIPANTS

I – Classement par cotes

Cote A : premier seizième
Cote B : deuxième seizième
Cote C : deuxième huitième
Cote D : deuxième quart
Cote E : deuxième moitié

Cote	A	B	C	D	E
Notes	38 à 63	32 à 38	25 à 32	18 à 25	0 à 18

II – Classement par quartiles

Quartile	1	2	3	4
Notes	25 à 63	18 à 25	13 à 18	0 à 13

III – Classement par déciles

Décile	1	2	3	4	5
Notes	35 à 63	27 à 35	23 à 27	20 à 23	18 à 20
Décile	6	7	8	9	10
Notes	16 à 18	14 à 16	11 à 14	8 à 11	0 à 8

QUESTIONS ET SOLUTIONS

QUESTION 1 (Une longue addition)

Monsieur SOSSOM a additionné, sans se tromper, les 1234 premiers nombres de la suite 1, 11, 111, 1111, 11111, ... dans le système décimal usuel. Quels sont les cinq derniers chiffres de son résultat?

SOLUTION SUGGÉRÉE

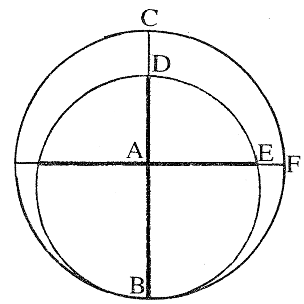
On voit facilement que la somme comporte 1234 unités, 1233 dizaines, 1232 centaines, et ainsi de suite. Pour trouver les cinq derniers chiffres de cette somme, il suffira donc d'effectuer l'addition suivante:

$$
\begin{array}{ccc|ccccc}
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 3 & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 1 & & & \\
1 & 2 & 3 & 0 & & & & \\
\hline
 & & & 6 & 7 & 7 & 6 & 4
\end{array}
$$

La réponse est donc: 6, 7, 7, 6, 4.

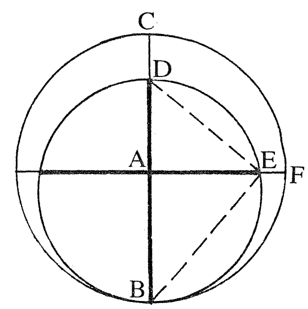
QUESTION 2 (Le croissant et la croix)

Deux cercles contenus l'un dans l'autre sont tangents en B (voir figure). Soit A le centre du grand cercle; FA $\perp$ AB. Quel est le rayon AB du grand cercle si les segments CD et EF sont de onze et de six millimètres respectivement?



SOLUTION SUGGÉRÉE

On démontre facilement que les triangles AEB et AED sont semblables au triangle DEB. Ils sont donc semblables entre eux et on a



$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD},$$

ou encore

$$AB \cdot AD = (AE)^2.$$

Comme

$$AD = (AB - 11) \quad \text{et} \quad AE = (AB - 6),$$

on a

$$AB\,(AB - 11) = (AB - 6)^2$$

ou

$$(AB)^2 - 11 \cdot AB = (AB)^2 - 12 \cdot AB + 36$$

ou

$$AB = 36.$$

QUESTION 3 (Le problème des racines)

La racine carrée d'un certain nombre rationnel positif augmente de 1/2 lorsque ce nombre augmente de 1. Quel est ce nombre?

SOLUTION SUGGÉRÉE

Soit x le nombre cherché. Les conditions sur x peuvent s'exprimer par l'équation

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1/2,$$

ou encore

$$\sqrt{x} + 1/2 = \sqrt{x+1}.$$

Élevant au carré, on obtient

$$x + \sqrt{x} + 1/4 = x + 1$$

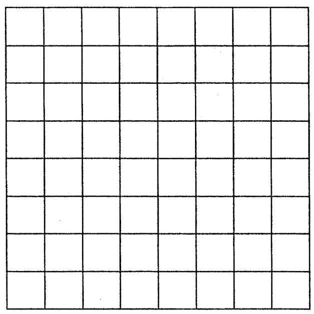
ou

$\sqrt{x} = 3/4.$

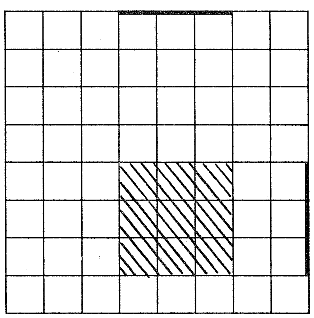
Élevant au carré, on obtient: $x = 9/16$.

QUESTION 4 (Le quadrillé)

Il y a combien de carrés dans la figure ci-contre? ***Attention:*** ne comptez pas uniquement les soixante-quatre petits carrés!



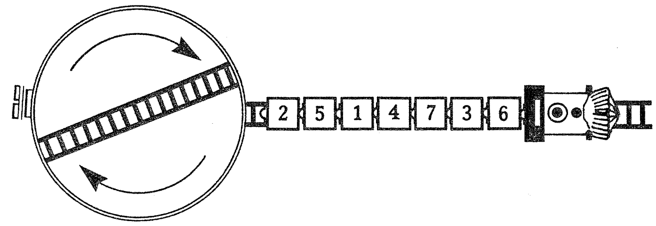
SOLUTION SUGGÉRÉE



Classons les carrés à dénombrer selon la longueur k de leur côté. Si l'unité est la longueur du côté du plus petit carré, alors k peut prendre les valeurs 1, 2, ..., 8. Chaque carré de côté k est complètement décrit, comme pour $k = 3$ dans la figure, par la donnée d'un segment horizontal de longueur k et d'un segment vertical de longueur k. Il existe huit segments horizontaux de longueur 1, sept de longueur 2, 6 de longueur 3, cinq de longueur 4, quatre de longueur 5, trois de longueur 6, deux de longueur 7 et un de longueur 8. Il y a donc 8^2 carrés de côté 1, 7^2 de côté 2, 6^2 de côté 3, 5^2 de côté 4, 4^2 de côté 5, 3^2 de côté 6, 2^2 de côté 7 et 1^2 de côté 8. En tout, 204 carrés.

QUESTION 5 (Le problème du train)

Dans une gare de triage, le chauffeur de la locomotive doit mettre ses sept wagons, numérotés de 1 à 7, dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, avec le wagon numéro 7 le plus près de la locomotive. Pour modifier l'ordre des wagons, il doit en placer un certain nombre, entre deux et sept, sur un segment de voie ferrée placé sur une plaque tournante, puis faire tourner la plaque de 180 degrés. La plaque s'immobilise dès que les rails sont de nouveau alignés. Le chauffeur ne peut placer aucun wagon au-delà de la plaque. La plaque met quinze minutes à faire ce demi-tour et, pour simplifier, disons que les manoeuvres de la locomotive durent quinze minutes avant chaque rotation de la plaque. Au départ, les wagons sont dans l'ordre 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6. Vérifier que le chauffeur pourrait accomplir sa tâche en mettant successivement 5, puis 7, 6, 3, 5, 3, 4, 2, 3 et enfin 2 wagons sur la plaque tournante. Mais cette opération prend cinq heures! Pouvez-vous suggérer une suite de manoeuvres qui ne prendra que trois heures et demie? Pour quelle raison est-il impossible au chauffeur de s'en tirer en moins de sept manoeuvres?



SOLUTION SUGGÉRÉE

Plaçons cinq wagons sur la plaque tournante; le chauffeur de la locomotive remplace ainsi l'ordre 2 5 1 4 7 3 6 par l'ordre 7 4 1 5 2 3 6. Dénotons cette manoeuvre comme suit:

$$\underline{2\ 5\ 1\ 4\ 7}\ 3\ 6 \longrightarrow 7\ 4\ 1\ 5\ 2\ 3\ 6.$$

Alors les manoeuvres subséquentes seront

$$\underline{7\ 4\ 1\ 5\ 2\ 3\ 6} \longrightarrow 6\ 3\ 2\ 5\ 1\ 4\ 7,$$
$$\underline{6\ 3\ 2\ 5\ 1\ 4}\ 7 \longrightarrow 4\ 1\ 5\ 2\ 3\ 6\ 7,$$
$$\underline{4\ 1\ 5}\ 2\ 3\ 6\ 7 \longrightarrow 5\ 1\ 4\ 2\ 3\ 6\ 7,$$
$$\underline{5\ 1\ 4\ 2\ 3}\ 6\ 7 \longrightarrow 3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7,$$
$$\underline{3\ 2\ 4}\ 1\ 5\ 6\ 7 \longrightarrow 4\ 2\ 3\ 1\ 5\ 6\ 7,$$
$$\underline{4\ 2\ 3\ 1}\ 5\ 6\ 7 \longrightarrow 1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7,$$
$$\underline{1\ 3}\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7 \longrightarrow 3\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7,$$
$$\underline{3\ 1\ 2}\ 4\ 5\ 6\ 7 \longrightarrow 2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7,$$
$$\underline{2\ 1}\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \longrightarrow 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7.$$

On a donc vérifié que le chauffeur pourrait accomplir sa tâche par les dix manoeuvres mentionnées dans l'énoncé du problème. Mais il pourrait aussi le faire en plaçant successivement cinq, sept, six, deux, trois, cinq et enfin trois wagons sur la plaque tournante:

$$\underline{2\ 5\ 1\ 4\ 7}\ 3\ 6 \longrightarrow 7\ 4\ 1\ 5\ 2\ 3\ 6,$$
$$\underline{7\ 4\ 1\ 5\ 2\ 3\ 6} \longrightarrow 6\ 3\ 2\ 5\ 1\ 4\ 7,$$

$\underline{6\;3\;2\;5\;1\;4}\;7 \longrightarrow 4\;1\;5\;2\;3\;6\;7,$

$\underline{4\;1}\;5\;2\;3\;6\;7 \longrightarrow 1\;4\;5\;2\;3\;6\;7,$

$\underline{1\;4\;5}\;2\;3\;6\;7 \longrightarrow 5\;4\;1\;2\;3\;6\;7,$

$\underline{5\;4\;1\;2\;3}\;6\;7 \longrightarrow 3\;2\;1\;4\;5\;6\;7,$

$\underline{3\;2\;1}\;4\;5\;6\;7 \longrightarrow 1\;2\;3\;4\;5\;6\;7.$

L'ordre initial des wagons ne comporte aucune paire de wagons qui soient successifs à la fois dans leur position et dans leur numérotation. L'ordre final comporte sept de ces paires, si l'on compte celle qui est formée du wagon 7 et de la locomotive. Comme chaque manoeuvre sur la plaque tournante produit au plus une paire nouvelle, il faudra un minimum de sept manoeuvres.

QUESTION 6 (La «propriété 37»)

Convenons de dire qu'un entier positif en base 10 a la *«propriété 37»* si son plus petit chiffre est 3 et son plus grand chiffre, 7. Ainsi 45 736 434 a la propriété 37. Combien de nombres à huit chiffres ont la propriété 37?

SOLUTION SUGGÉRÉE

Soit E l'ensemble des nombres à huit chiffres ayant la «propriété 37». Soit A l'ensemble des nombres à huit chiffres où n'apparaît aucun des chiffres suivants: 0, 1, 2, 8, 9.

Alors le nombre $|A|$ des éléments de A est 5^8, puisqu'il y a huit positions à remplir et que, pour chacune de ces huit positions, on a le choix entre cinq chiffres: 3, 4, 5, 6 ou 7.

Tout élément de E est dans A mais, parmi les éléments de A, certains ne sont pas dans E, à savoir:

(a) ceux qui, comme 55 555 555, ne contiennent ni 3 ni 7,

(b) ceux qui, comme 33 333 333, contiennent 3 mais pas 7 et,

(a) ceux qui, comme 77 777 777, contiennent 7 mais pas 3.

Pour dénombrer ces éléments de A qui ne sont pas dans E, on définit les ensembles suivants. Soit B l'ensemble des éléments de A où 3 n'apparaît pas. Soit C l'ensemble des éléments de A où 7 n'apparaît pas. Soit D l'ensemble des éléments de A où n'apparaissent ni 3 ni 7.

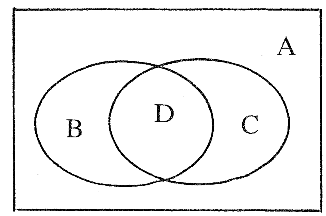
Par le même raisonnement que pour $|A|$, on a

$$|B| = |C| = 4^8 \quad \text{et} \quad |D| = 3^8.$$

Les éléments de A qui ne sont pas dans E à cause de (a) sont les 3^8 éléments de D. Ceux qui ne sont pas dans E à cause de (b) sont les $4^8 - 3^8$ éléments de $C \setminus D$. Ceux qui sont absents de E en vertu de (c) sont les $4^8 - 3^8$ éléments de $B \setminus D$. On a donc

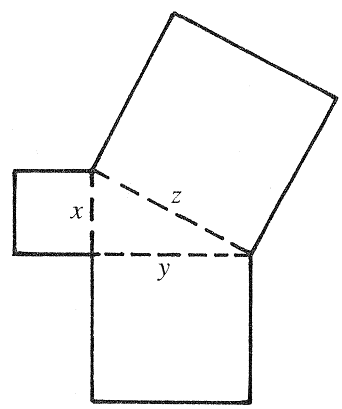
$$\begin{aligned} |E| &= |A| - |B \setminus D| - |C \setminus D| - |D| \\ &= 5^8 - (4^8 - 3^8) - (4^8 - 3^8) - 3^8 \\ &= 5^8 - 2 \times 4^8 + 3^8. \end{aligned}$$

Le diagramme ensembliste ci-contre illustre la situation.



QUESTION 7 (Il y a du Pythagore là-dessous)

On construit un carré sur chacun des côtés d'un triangle rectangle (voir la figure). Sachant que le périmètre (ligne pleine) de la figure obtenue est de 78 cm et que son aire totale est de 301 cm^2, calculer l'aire du triangle rectangle initial.



SOLUTION SUGGÉRÉE

Soient x et y les deux côtés de l'angle droit du triangle et soit z son hypothénuse (voir la figure ci-dessus). Par le théorème de Pythagore, nous avons:

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Le périmètre étant de 78 cm, nous avons la relation:

$$3x + 3y + 3z = 78. \tag{2}$$

L'aire totale étant de 301 cm^2, nous avons aussi:

$$\frac{1}{2}xy + x^2 + y^2 + z^2 = 301. \tag{3}$$

L'équation (2) peut aussi s'écrire sous la forme:

$$x + y = 26 - z. \tag{4}$$

Élevons au carré chaque côté de l'équation (4):

$$x^2 + 2xy + y^2 = 676 - 52z + z^2. \tag{5}$$

L'équation (1) permet de simplifier (5) comme suit:

$$xy = 338 - 26z, \tag{6}$$

et d'écrire (3) sous la forme suivante:

$$xy = 602 - 4z^2. \qquad (7)$$

En soustrayant (7) de (6) terme à terme, on obtient:

$$4z^2 - 26z - 264 = 0. \qquad (8)$$

L'équation (8) a deux racines: $z = 12$ et $z = -11/2$. La deuxième racine est à rejeter. Substituant $z = 12$ dans (6), on obtient:

$$xy = 338 - 312 = 26.$$

L'aire du triangle est donc $\frac{1}{2}xy = 13$.

RECTIFICATIONS

*La liste des gagnants au concours de l'Association mathématique du Québec au **niveau collégial** pour l'année 1983 (cf. Bulletin de mai) aurait dû se lire comme suit:*

1er	BEAUGRAND Martin	Collège Français	200 $
2e	DUFOUR Matthieu	Collège François-Xavier-Garneau	150 $
3e	DEROME Philippe	Collège Jean-de-Brébeuf	70 $
3e	JARVIS Peter Robert	Lower Canada College	70 $
3e	ROYER Christian	Collège Jean-de-Brébeuf	70 $
6e	GAGNON Gilles	Collège Édouard-Montpetit	45 $
7e	BERNIER David	Collège François-Xavier-Garneau	40 $
8e	COUTU Stéphane	Collège Bois-de-Boulogne	35 $
8e	DESSUREAULT Yves	Collège Jean-de-Brébeuf	35 $
8e	LONGPRÉ Martin	Collège de L'Assomption	35 $
11e	NADEAU Marie-Josée	Petit Séminaire de Québec	30 $
12e	LEGAULT Éric	Collège Jean-de-Brébeuf	25 $
13e	COLLINS Louis	Collège Jean-de-Brébeuf	25 $
14e	HODROGE Faten	Collège Jean-de-Brébeuf	20 $

LES PROBLÈME-CHOCS

SOLUTION ***(cf. p. 21)***

Comme le monde est petit!

Soit $N = 1000$ et $n = 10$. Les deux premières probabilités se calculent d'une manière relativement traditionnelle:

$$p_1 = \frac{10}{1000} = 0{,}01$$

$$p_2 = 1 - \frac{\binom{N-n}{n}}{\binom{N}{n}} = 0{,}096 \approx 0{,}1$$

La troisième probabilité est plus compliquée à calculer (vous avez peut-être une meilleure solution!). Elle peut être estimée par l'expression suivante, en autant que n^2 soit beaucoup plus petit que N:

$$p_3 \approx 1 - \frac{\binom{N-n^2}{n^2}}{\binom{N}{n^2}} \approx 1.$$

○ ◆ □ ◆ ○