GROUPE SYMÉTRIQUE et TABLEAUX DE YOUNG

Remarques sur l'algorithme générateur

Gaétan Hains

Cet exposé fait suite à une série de cinq cours donnés par Claude Pichet (dép. de Math. UQAM) à l'occasion du camp mathématique 1982 de l'A.M.Q. qui eut lieu à Sherbrooke du 14 mai au 4 juin. La première section pose les définitions d'usage et est tirée de l'article de Gérard Viennot[1] (on recommande la lecture des résultats de son article au lecteur intéressé par la démonstration du théorème 3.6). La seconde section démontre que l'algorithme de Robinson-Schensted définit une bijection. La troisième section contient une simplification de cet algorithme pour un ensemble particulier de permutations.

1 – DÉFINITIONS DE BASE

Notons $[n]$ l'ensemble des entiers 1, 2, ..., n et S_n le groupe (dit ***symétrique***) formé des permutations de $[n]$ et de la composition usuelle des applications. $\sigma \in S_n$ sera noté par le mot $(\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n))$ (son «***écriture***»). On sait que *card* $S_n = n!$.

1.1 Définition

Soit $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_q > 0)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$, un ***partage*** de l'entier n (i.e. $\Sigma_{i=1}^{q} \lambda_i = n$). Nous écrirons alors $\lambda \vdash n$.

Un ***tableau de Young*** (ou ***tableau standard***) à n éléments et de ***forme*** λ est un tableau indexé:

$$T = \{T(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i\}$$

tel que:

(a) les éléments sont des *entiers positifs* distincts;

(b) chaque ligne (i fixe, j croissant) forme une suite croissante,

(c) chaque colonne (i croissant, j fixe) forme une suite croissante.

On note T_0 le tableau vide.

1.2 Exemple

Le tableau:

11			
4	8		
2	5	7	9

est un tableau de Young de forme (4,2,1).

Désignons par Y_n l'ensemble des tableaux de Young dont les entrées sont exactement les entiers de $[n]$. Dans ce qui suit, «***tableau complet***» sera synonyme d'élément de Y_n et «***tableau incomplet***» désignera les autres tableaux de Young; «***tableau***» voudra dire «tableau de Young».

Robinson a observé qu'il existe une bijection entre S_n et les couples de $Y_n \times Y_n$ dont les tableaux ont même forme λ; ceci permet d'écrire:

1.3 Propriété

$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f_\lambda)^2$ où f_λ désigne le nombre de tableaux complets de forme λ.

Il existe[2] un moyen d'exprimer f_λ en utilisant la notion de ***crochet*** (ou d'***équerre***) dans la forme donnée: en effet, si on associe à chaque «case» (k,l) de λ, le nombre c_{kl} de cases (i,j) telles que ($i = k$ et $j \geqslant l$) ou ($i \geqslant k$ et $j = l$) – qu'on nomme ***longueur du crochet de coin (k,l)*** – et si on divise $n!$ par le produit de tous les c_{kl} de λ, alors on obtient f_λ.

1.4 Propriété

Si $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_q)$, alors:

$$f_\lambda = n! \Big/ \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{\lambda_i} c_{ij}.$$

Ceci est démontré aux références 2 et 6.

1.5 Exemple

Pour $\lambda = (4,2,1)$, si on place $T(i,j) = c_{ij}$, on obtient:

1			
3	1		
6	4	2	1

d'où $f_\lambda = 7!/(6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1) = 35$ et on peut facilement vérifier qu'il y a bien 35 tableaux complets de forme λ.

Donnons maintenant la version de Schensted de l'algorithme dit de *Robinson-Schensted* qui explicite la bijection mentionnée ci-haut. Elle consiste en une itération d'une méthode d'insertion d'un entier à un tableau (complet ou incomplet).

1.6 Définition (algorithme d'insertion)

Soit $T = \{T(i,j)\}$ un tableau (complet ou non) de k éléments et $x \notin T$ un entier. Le nouveau tableau (T,x) à $k+1$ éléments se construit ainsi:

(a) Si $T = T_0$, alors (T,x) est le tableau à un seul élément: $\{T(1,1) = x\}$.

(b) Si $T \neq T_0$, on obtient (T,x) de la manière récursive suivante:

- si x est supérieur à tous les $T(1,j)$, on ajoute x à la fin de la première ligne;
- sinon, soit $y = min\{T(1,j) \mid T(1,j) > x\}$; on remplace y par x et on *insère* y dans le tableau obtenu en supprimant de T sa première ligne. Ceci toujours selon (a) et (b) ci-dessus.

1.7 Exemple

Si $T =$

11			
4	8		
2	5	7	9

et si $x = 6$, alors:

$(T,x) =$

11			
8			
4	7		
2	5	6	9

en 4 appels imboîtés de l'algorithme 1.6.

1.8 Définition (algorithme de Robinson-Schensted)

Soit $\sigma \in S_n$ où $\sigma = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; on lui fait correspondre les suites $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ et $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ de tableaux (dont les derniers sont complets) définis par:

(a) $P_0 = T_0$ et $P_k = (P_{k-1}, x_k)$ pour $k = 1,2,\ldots,n$;

(b) $Q_0 = T_0$ et, pour $k = 1,2,\ldots,n$, si (i_k, j_k) est la case ajoutée à P_{k-1} lors de l'insertion, alors on obtient Q_k en ajoutant la case $Q_k(i_k, j_k) = k$ à Q_{k-1}.

On note alors $P_n = P(\sigma)$, $Q_n = Q(\sigma)$ et on pose $\mathcal{S}(\sigma) = (P(\sigma), Q(\sigma))$.

$\mathcal{S}$ est bien une application de S_n dans

$$\{(S,T) \in Y_n \times Y_n \mid S \text{ et } T \text{ ont même forme}\}$$

car 1.8 est défini de façon unique en chacune de ses étapes.

1.9 Exemple

Si $\sigma = (3,6,4,1,7,2,5) \in S_7$, alors on vérifie que:

$P(\sigma) =$

6		
3	4	7
1	2	5

et $Q(\sigma) =$

4		
3	6	7
1	2	5

2 – *PROPRIÉTÉ DE BASE*

Robinson[3] et Schensted[4] ont montré:

2.1 Propriété

$\mathcal{S}$ est une bijection.

On peut démontrer ceci en observant qu'il est possible de construire un algorithme pour $\mathcal{S}^{-1}$ qui définisse aussi une application. De façon analogue à 1.8, cet algorithme s'appuie sur une méthode d'extraction d'un entier à un tableau (complet ou non).

2.2 Définition (algorithme d'extraction)

Soit $T = \{T(i,j)\}$ un tableau donné et $T(p,q) \in T$. Considérons l'unique chaîne $x_p > x_{p-1} > \ldots > x_1$ telle que:

(a) $x_p = T(p,q)$,

(b) si $x_{k+1} = T(m,n)$ alors, pour $k = 1,2,\ldots,p-1$, $x_k = max\{T(m-1,j) \mid T(m-1,j) < x_{k+1}\}$ où tous les x_k sont des entiers du tableau.

On note alors $T \setminus (x_p, x_1)$ le tableau obtenu en substituant x_{k+1} à x_k dans T (pour $k = 1,\ldots,p-1$), enlevant la case initiale de x_p (soit (p,q)). Ainsi l'entrée x_1 disparaît.

Exemple

Dans l'exemple 1.7, si on *extrait* $x_p = 11$ de $(T,x) = (T,6)$, la chaîne obtenue est $11 > 8 > 7 > 6$ et $(T,6) \setminus (11,6) = T$ tel qu'espéré. Ainsi 2.2 inverse la procédure 1.6.

2.3 Définition (algorithme de démontage)

Soit $(P,Q) \in Y_n \times Y_n$ (où les tableaux complets P et Q ont même forme). Si $m = Q(i,j)$, désignons par $P(Q^{-1}(m))$ l'élément $P(i,j)$. Soit aussi la suite de tableaux $P = P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0 = T_0$ définie par: $P_{k-1} = P_k \setminus (P(Q^{-1}(k)), y_k)$, pour $k = 1,2,\ldots,n$. Alors on obtient les entiers $y_n, \ldots, y_1$ et $\sigma = (y_1, \ldots, y_n) \in S_n$ est $\mathcal{S}^{-1}(P,Q)$. Pour les mêmes raisons qu'en 1.8, $\mathcal{S}^{-1}$ est aussi une application qui est bien l'inverse de $\mathcal{S}$.

Voici maintenant une des propriétés les plus remarquables de $\mathcal{S}$, due à Schützenberger[5] et Schensted[4]:

2.4 Théorème

$\forall \sigma \in S_n$: $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$ et $Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma)$ i.e. $\mathcal{S}(\sigma) = (P,Q) \Rightarrow \mathcal{S}(\sigma^{-1}) = (Q,P)$.

Remarquons que la version géométrique de l'algorithme donnée par G. Viennot rend 2.4 évident.

Corollaire

Si π est une involution de S_n (i.e. $\pi = \pi^{-1}$), alors $\mathcal{S}(\pi) = (P,P)$.

Il y a donc bijection entre Y_n et les involutions du groupe symétrique, d'où:

2.5 Propriété

$card\{\pi \in S_n \mid \pi = \pi^{-1}\} = card\, Y_n = \sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda$.

Une ***transposition*** $\tau \in S_n$ est une involution à $n-2$ points fixes i.e. une permutation qui ne fait qu'interchanger deux entiers. On peut donner de façon générale les tableaux de certaines involutions sur $[n]$ composées d'une ou deux transpositions (disjointes).

Soit τ_{ij} la transposition telle que $\forall x \in [n]$: $x \neq i$, $x \neq j \Rightarrow \tau(x) = x$; $\tau(i) = j$; $\tau(j) = i$ avec $i < j$ par convention, alors:

(a)

$$\tau_{ij} \xmapsto{\mathcal{S}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline j \\ \cline{1-1} i+1 \\ \hline 1 & 2 \ldots & i-1 & i & i+2 \ldots & j-1 & j+1 \ldots & n \\ \hline \end{array}$$

où la 3[e] ligne disparaît si $i+1 = j$;

(b) si $i < j < k < l$,

$$\tau_{ij} \circ \tau_{kl} \xmapsto{\mathcal{S}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline j & l \\ \cline{1-2} i+1 & k+1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \ldots & i & i+2 \ldots \\ \hline \end{array}$$

(la 1[re] ligne est simplement l'ordre naturel des entiers de $[n] \setminus \{i+1, j, k+1, l\}$). Ici on enlève j (respectivement l) à la 3[e] ligne si $i+1 = j$ (respectivement $k+1 = l$). Si $j+1 = k$, on confond les cases correspondantes sur la 1[re] ligne.

Les cas (a) et (b) ci-dessus se généralisent à celui d'une involution dont les paires d'éléments transposés ne se croisent pas dans l'ordre naturel.

(c) Si $i < k < l < j$,

$$\tau_{ij} \circ \tau_{kl} \xmapsto{\mathcal{S}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline j \\ \cline{1-1} l \\ \cline{1-1} k+1 \\ \cline{1-1} i+1 \\ \hline 1 & 2 \ldots & i & i+2 \ldots \\ \hline \end{array}$$

Ces résultats s'obtiennent directement de 1.8; toutefois le cas $i < k < j < l$ ne se traite pas aussi simplement.

3 – AUTRES PROPRIÉTÉS

Une fois l'algorithme explicité, Schensted[4] en déduit les propositions 3.1 et 3.2 ci-après:

3.1 Propriété

Soit $\sigma \in S_n$; le cardinal λ_1 (respectivement $\lambda_1{}^*$) de la première ligne (respectivement colonne) de $P(\sigma)$ est égal au cardinal maximum des suites croissantes (respectivement décroissantes) extraites de σ.

Une suite croissante de $\sigma = (x_1, \ldots, x_n)$ est une chaîne $x_{i_1} < \ldots < x_{i_p}$ où $i_1 < \ldots < i_p$.

Remarque

De cette définition, il résulte qu'il existe une bijection entre les suites croissantes (ou décroissantes) de σ et celle de σ^{-1} qui en préserve le cardinal (p). En effet, $x_{i_k} = \sigma(i_k)$; donc $i_k = \sigma^{-1}(x_{i_k})$. Sans égard à $\mathcal{S}$, ceci confirme, par 3.1, que $P(\sigma)$ et $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$ ont autant de lignes et de colonnes.

Le nombre de «points» $i \in [n]$ tels que $\sigma(i) = i$, dits ***points fixes*** d'une involution, se traduit aussi dans la forme des tableaux (Schützenberger).

3.2 Propriété

Si $\sigma \in S_n$ et $\sigma = \sigma^{-1}$, alors $card\{i \in [n] \mid \sigma(i) = i\}$ est égal au nombre de colonnes de longueur impaire dans $P(\sigma)$.

3.3 Définition

(a) Pour $\pi = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n$, on note $\pi^* = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ la permutation transposée de π.

(b) Pour $T \in Y_n$ de forme λ, on note T^* le tableau transposé (au sens matriciel) de T dont la forme λ^* est le ***partage*** dit ***conjugué*** de λ.

Nous utiliserons à ce sujet un autre résultat de Schützenberger[5]:

3.4 Lemme

Si $\pi \in S_n$ alors $P(\pi^*) = P(\pi)^*$.

3.5 Définition

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'écriture d'une permutation. On nomme ***montée*** (respectivement: ***descente***) de longueur k, une suite x_{l+1}, x_{l+2}, ..., x_{l+k} dans celle-ci où, pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $x_{l+i+1} = x_{l+i}+1$ (respectivement -1) et $l \in [n-1]$.

Soit $\pi \in S_n$ et n non-premier dont $k > 1$ est facteur. S'il est possible de scinder l'écriture de π en n/k montées (respectivement descentes) de longueur k, on écrira $\pi \in S_n^{[k]}$. On définit alors $s_k : S_n^{[k]} \longrightarrow S_{n/k}$ où $s_k(\pi)$ est la permutation donnant l'ordre des montées (respectivement descentes) de π; par exemple si $\pi = (5,6,1,2,9,10,3,4,7,8) \in S_{10}^{[2]}$, alors $s_2(\pi) = (3,1,5,2,4) \in S_5$.

3.6 Théorème

Si $\pi \in S_n^{[k]}$ est découpable en montées et si $\tau = s_k(\pi)$, alors $\mathcal{S}(\pi)$ est obtenu en substituant (géométriquement) aux entiers-cases de $\mathcal{S}(\tau)$, les montées correspondantes placées en rangées.

Le lecteur est invité à lire le texte suggéré à la référence 1 où il trouvera une version de l'algorithme $\mathcal{S}$ à l'aide de laquelle on démontre 3.6 assez aisément. Quoi qu'il en soit, le théorème découle du fait que les montées agissent comme classes d'équivalence lorsqu'on compare les entiers dans l'exécution de $\mathcal{S}$.

Corollaire

Si $\pi \in S_n^{[k]}$ se découpe en descentes et si $\tau = s_k(\pi)$, alors $P(\pi)$ est obtenu en substituant aux cases de $P(\tau)$ les descentes correspondantes placées en colonnes.

Démonstration

$\pi^* \in S_n^{[k]}$ se découpe en montées et $s_k(\pi^*) = \tau^*$; par le lemme 3.4, $P(\pi)^* = P(\pi^*)$ et on applique le théorème à π^*. Le passage au tableau transposé ($P(\pi^*) \longmapsto P(\pi)$) transforme les montées placées en rangées en des colonnes.

3.7 Exemple

Pour $\pi = (5,6,1,2,9,10,3,4,7,8) \in S_{10}^{[2]}$, $s_2(\pi) = (3,1,5,2,4)$ et on a:

$$\mathcal{S}(s_2(\pi)) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \cline{1-2} 3 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} ; \begin{array}{|c|c|c|} \cline{1-2} 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \right) \quad \text{et}$$

$$\mathcal{S}(\pi) =$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \cline{1-4} 5 & 6 & 9 & 10 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline \end{array} ; \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \cline{1-4} 3 & 4 & 7 & 8 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \hline 1 & 2 & 5 & 6 & 9 & 10 \\ \hline \end{array} \right).$$

Si $\pi = (6,5,4,3,2,1,9,8,7) \in S_9^{[3]}$, alors $s_3(\pi) = (2,1,3) \in S_3$, et

$$\mathcal{S}(s_3(\pi)) = \left(\begin{array}{|c|c|} \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} ; \begin{array}{|c|c|} \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right);$$

$$P(\pi) = \begin{array}{|c|c|} \cline{1-1} 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 1 & 7 \\ \hline \end{array}.$$

Les permutations auxquelles 3.6 s'applique sont peu nombreuses; cependant le théorème permet de diviser par k le nombre d'insertions (1.6) dans l'exécution de $\mathcal{S}$, (il en va de même pour le théorème analogue relatif à $\mathcal{S}^{-1}$). Puisque $s_k(S_n^{[k]}) = S_{n/k}$, les permutations découpables (en montées) sont au nombre de

$$\sum_{k|n} card\ S_{n/k} = \sum_{k|n} (n/k)!$$

(où la somme est prise sur les diviseurs k de n).

Il est à remarquer que, pour k fixe:

(a) l'application $s_k : S_n^{[k]} \longrightarrow S_{n/k}$ est bijective;

(b) $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n^{[k]}$, $s(\sigma_1 \circ \sigma_2) = s(\sigma_1) \circ s(\sigma_2)$.

$S_{n/k}$ et $S_n^{[k]}$ sont donc isomorphes et ce dernier ensemble est un sous-groupe de S_n. On se demande alors si, chez les paires de tableaux associées, il n'y aurait pas (en plus d'une bijection) un produit $* : (Y_n \times Y_n)^2 \longrightarrow (Y_n \times Y_n)$ définissant une structure de groupe telle que

$$S_n \cong \{(P,Q) \in Y_n \times Y_n \mid P \text{ et } Q \text{ ont même forme}\}.$$

Un tel produit permettrait d'énumérer $\mathcal{S}(S_n)$ en partant des paires de tableaux des transpositions de S_n (puisque celles-ci génèrent S_n) sans utiliser $\mathcal{S}$.

◇ ◇ ◇

P.S. *L'auteur remercie Claude Pichet et Jacques Labelle pour leurs suggestions et leur encouragement.*

BIBLIOGRAPHIE

1. VIENNOT, G. *Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted* dans *Combinatoire et représentation du Groupe Symétrique*, Springer, notes in math. no 579, Strasbourg 1976.
2. KNUTH, D.E. *The Art of Computer Programming*, Vol. III, Addisson & Wesley, 1973.
3. ROBINSON, G. de B. *On the Representation of the Symmetric Group*, dans *American Journal of Math.* no 60, 1938, 745-760.
4. SCHENSTED, C. *Longest Increasing and Decreasing Sequences*, dans *Canadian Journal of Mathematics*, no 13, 1961, 179-192.
5. SCHÜTZENBERGER, M.-P. *Quelques remarques sur une construction de Schensted*, dans *Math. Scand., 12*, 1963, 117-128.
6. FRANZBLAU & ZEILBERGER, *A Bijective Proof of the Hooklenght Formula*, dans *Journal of Algorithms no 3*, 1982, 317-343.

FONDS «ROLAND BROSSARD»

Les lauréats des prix seront connus lors du 26^e congrès de l'Association mathématique du Québec (AMQ) qui aura lieu au Petit Séminaire de Québec les 20, 21 et 22 octobre 1983. Dans un prochain numéro, nous présenterons dans cette revue les heureux gagnants des principaux prix.

BONNE NOUVELLE

On apprend, en dernière heure, que les élèves du cours secondaire qui veulent poursuivre leurs études en sciences et en mathématiques au cégep devront réussir le cours de mathématiques de 4^e secondaire et les cours de mathématiques correspondant aux options I et II. Pour les élèves qui ne font pas ce choix, on exigera seulement la réussite du cours de mathématiques de 4^e secondaire. Les détails de ces nouvelles directives viendront sous peu.

À l'occasion du 26^e congrès annuel de l'AMQ, l'équipe actuelle du Bulletin est heureuse de rendre hommage à tous ces vaillants collaborateurs qui, ces 25 dernières années, ont permis la parution de notre revue.

Merci également à tous nos fidèles lecteurs pour leur encouragement et leur indispensable appui financier.