CONCOURS DE L'AMQ 1983 *(niveau collégial I et II)*

Liste des lauréats — Questions et solutions

PRIX	1er	BEAUGRAND Martin	Collège français	200 $
	2^{e}	DUFOUR Matthieu	Collège François-Xavier-Garneau	150 $
	3^{e}	DEROME Philippe	Collège Jean-de-Brébeuf	70 $
	3^{e}	JARVIS Peter Robert	Lower Canada College	70 $
	5^{e}	GAGNON Gilles	Collège Édouard-Montpetit	45 $
	6^{e}	BERNIER David	Collège François-Xavier-Garneau	40 $
	7^{e}	COUTU Stéphane	Collège Bois-de-Boulogne	35 $
	7^{e}	DESSUREAULT Yves	Collège Jean-de-Brébeuf	35 $
	7^{e}	LONGPRÉ Martin	Collège de l'Assomption	35 $
	10^{e}	LEGAULT Éric	Collège Jean-de-Brébeuf	30 $
	11^{e}	COLLINS Louis	Collège Jean-de-Brébeuf	25 $
	11^{e}	ROYER Christian	Collège Jean-de-Brébeuf	25 $
	13^{e}	HODROGUE Faten	Collège Jean-de-Brébeuf	20 $

MENTIONS HONORABLES	PRIMEAU Éric	Collège Marie-Victorin
	LA RUELLE Arnaud	Collège Stanislas
	MARTIN Louis	Petit séminaire de Québec
	BUIALTI Laurent	Collège Stanislas
	PARADIS Audrey	Collège Marguerite-Bourgeoys
	THIBOUTOT Bernard	Collège de Sainte-Foy
	BOIVIN Réjean	Collège de Maisonneuve
	CATY François	Collège Édouard-Montpetit
	COUPAL Daniel	Collège de Saint-Jean-sur-Richelieu
	LABBÉ Bruno	Petit séminaire de Québec
	LEPAGE Pierre	Collège de Sainte-Foy
	BUIALTI Muriel	Collège Stanislas
	SAMSON Denis	Collège de Sainte-Foy
	TURPIN Sophie	Collège Jean-de-Brébeuf
	GAGNON Stéphane	Collège Mérici
	NADEAU Marie-Josée	Petit séminaire de Québec
	RICHARD Claude	Collège de Sept-Iles
	SAINT-GEORGES Sylvain	Collège Marguerite-Bourgeoys
	GÉLINAS Manon	Collège de Valleyfield
	OSTIGUY Richard	Collège Jean-de-Brébeuf
	LAVOIE Christian	Collège de Saint-Jérôme
	BERGERON Mario	Collège de Jonquière
	BUSSIÈRE David	Champlain College (St Lawrence Campus)
	DUTIL Lucie	Collège Édouard-Montpetit
	MARTINEAU André	Collège Jean-de-Brébeuf
	NGUYEN Kim	Lower Canada College
	POULIN Michel	Collège François-Xavier-Garneau

QUESTIONS et SOLUTIONS

QUESTION 1 (Une drôle d'équation)

Pour chaque réel $a \neq 0$, désignons par a^+ le nombre suivant:

$$a^+ = a + \frac{1}{a}.$$

Trouver un nombre réel x satisfaisant l'équation:

$$x^{++} = 4.$$

SOLUTION

En général, on a:

$$t^+ = c \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = c \Leftrightarrow t^2 - ct + 1 = 0.$$

D'où, $t^+ = c \Leftrightarrow t = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2-4}}{2}$.

En particulier,

$$x^{++} = 4 \Leftrightarrow x^+ = \frac{4 \pm \sqrt{4^2-4}}{2} \Leftrightarrow x^+ = 2 \pm \sqrt{3}.$$

1er cas:

$$x^+ = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{3} \pm \sqrt{(2+\sqrt{3})^2-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3}+3}}{2}.$$

2e cas:

$x^+ = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{2-\sqrt{3} \pm \sqrt{(2-\sqrt{3})^2-4}}{2}$: *solution impossible.*

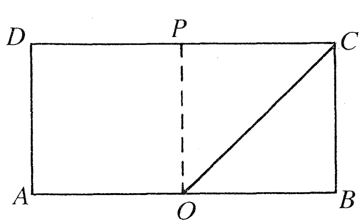
Donc, *réponse*,

$$x = \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{4\sqrt{3}+3}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{4\sqrt{3}+3}}{2},$$

i.e. $x = 3{,}44$ ou $x = 0{,}29$.

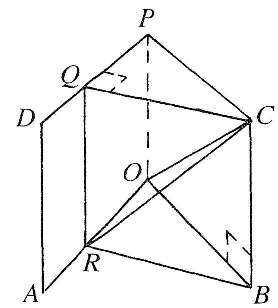
QUESTION 2 (Le rectangle plié)

La feuille de papier rectangulaire $ABCD$



est divisée en deux carrés égaux par le segment pointillé OP. Si on la plie sur le pointillé de façon à ce que $\angle AOB = 45°$, quelle sera alors la valeur de $\angle AOC$? Expliquez votre réponse.

SOLUTION



Plions le rectangle et considérons le plan $BCQR$ contenant BC et perpendiculaire au carré $AOPD$. Comme RC appartient à ce plan, nous avons $OR \perp RC$ (cf. figure ci-contre).

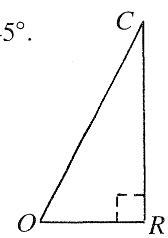
Nous avons aussi $OR \perp RB$ et $OB \perp BC$.

D'autre part nous pouvons écrire:

$$\frac{OR}{OC} = \frac{OR}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \qquad (1)$$

Mais $\dfrac{OR}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, puisque $\angle ROB = 45°$

et $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, puisque $\angle BOC = 45°$.



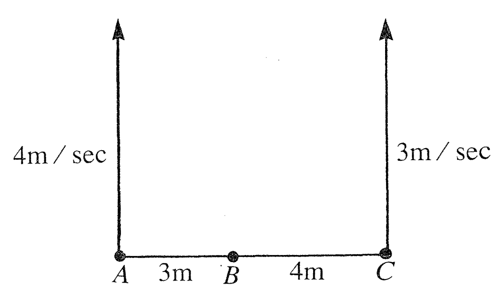
Substituant ces valeurs dans (1) on obtient

$$\frac{OR}{OC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Donc, $\angle AOC = \angle ROC = 60°$.

QUESTION 3 (Le robot d'arrêt)

Trois robots A, B et C sont placés sur une ligne est-ouest. A se déplace vers le nord à 4m / sec; B est à 3 mètres à l'est de A et peut se déplacer à 5m / sec dans n'importe quelle direction. Enfin, C est à 7 mètres à l'est de A et se déplace vers le nord à 3m / sec. B a pour mission d'arrêter les deux autres robots en allant presser le bouton d'arrêt de chacun. Dites en combien de temps au minimum il pourra s'acquitter de sa tâche.

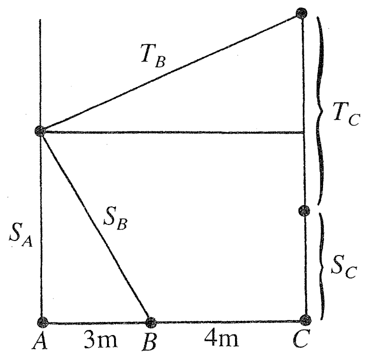


SOLUTION

Pour rejoindre A et C, le robot B se déplacera selon des droites, car la droite est le plus court chemin entre deux points.

Première solution

Supposons que le robot B arrête d'abord le robot de gauche, puis celui de droite. Il suivra alors un itinéraire conforme à la figure



On a donc:

$$S_B^2 = S_A^2+9 \qquad (1)$$

$$S_B = 5t_1 \qquad (2)$$

$$S_A = 4t_1 \qquad (3)$$

$$S_C = 3t_1 \qquad (4)$$

t_1 représentant le temps nécessaire pour que B rejoigne A. Substituant dans (1) les valeurs données par (2) et (3), on obtient:

$$25t_1^2 = 16t_1^2+9$$

d'où il résulte que

$$t_1 = 1 \text{ sec.}$$

On a aussi:

$$T_B^2 = (T_C-(S_A-S_C))^2+\overline{AC}^2 \qquad (5)$$

$$T_B = 5t_2 \qquad (6)$$

$$T_C = 3t_2 \qquad (7)$$

t_2 représentant le temps nécessaire pour que B rejoigne C. Substituant (3), (4), (6) et (7) dans (5), ainsi que la valeur connue de t_1, il vient

$$25t_2^2 = (3t_2-4+3)^2+49$$

d'où l'on tire l'équation

$$8t_2^2+3t_2-25 = 0$$

dont les racines sont

$$t_2 = \frac{-3\pm\sqrt{809}}{16}.$$

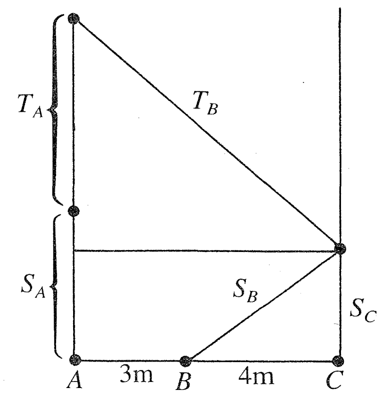
Écartant la racine négative, on obtient donc

$$t_2 = 1{,}6 \text{ sec.}$$

Ainsi, dans cette première solution, le temps total pour accomplir la tâche sera de 2,6 sec.

Seconde solution

Supposons que le robot B arrête d'abord le robot de droite, puis celui de gauche. L'itinéraire suivi se conformera alors à la figure



Donc on aura

$$S_B^2 = S_C^2+16$$

où $S_B = 5t_1$ et $S_C = 3t_1$, t_1 représentant maintenant le temps nécessaire à B pour rejoindre C. On trouve encore une fois que $t_1 = 1$.

On a aussi que

$$T_B^2 = (T_A+S_A-S_C)^2+49$$

avec $T_B = 5t_2$, $T_A = 4t_2$ et $S_A = 4t_1$, t_2 représentant maintenant le temps nécessaire à B pour rejoindre A. Cette fois-ci, par substitutions, on obtient l'équation

$$9t_2^2-8t_2-50 = 0$$

dont les racines sont

$$t_2 = \frac{4\pm\sqrt{466}}{9}.$$

Écartant la racine négative, on obtient

$$t_2 = 2{,}8.$$

D'où, un temps total de 3,8 secondes.

La première solution doit donc être préférée à la seconde.

QUESTION 4 (Les points milieux)

Montrer que, dans un quadrilatère, les droites joignant les points milieux des côtés opposés se rencontrent au point milieu du segment de droite joignant les points milieux des diagonales.

SOLUTION

Soient (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3) et (a_4,b_4), les sommets du quadrilatère. Les points milieux des diagonales sont alors

$$\left(\frac{a_1+a_3}{2}, \frac{b_1+b_3}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{a_2+a_4}{2}, \frac{b_2+b_4}{2}\right).$$

Le point milieu du segment qui les joint est

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}, \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}\right). \qquad (*)$$

Or, les points milieux des côtés sont

$$\left(\frac{a_1+a_4}{2}, \frac{b_1+b_4}{2}\right), \left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2+a_3}{2}, \frac{b_2+b_3}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{a_3+a_4}{2}, \frac{b_3+b_4}{2}\right)$$

respectivement. Finalement, les points milieux des droites qui joignent les milieux des côtés opposés sont l'un et l'autre égaux à

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}, \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}\right).$$

C'est bien le point milieu déterminé en (*).

QUESTION 5 (Les additions jumelles)

Dans les deux additions suivantes

$$\begin{array}{r} AAA \\ +\ \underline{BCD} \\ DBC \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} EEE \\ +\ \underline{FGH} \\ HFG \end{array}$$

chaque lettre représente un chiffre, des lettres distinctes correspondant à des chiffres distincts. Sachant que $A < E$, déterminer le chiffre représenté par chaque lettre.

SOLUTION

On est certain que A, B, D, E, F et H sont distincts de 0, car on doit avoir des nombres de trois chiffres.

Cas 1

$$A+D=C \qquad (1)$$

Sous-cas a)

$$A+C=B \qquad (2)$$

$$A+B=D \qquad (3).$$

(1) entraîne $C > D$,

(3) entraîne $D > B$,

(2) entraîne $B > C$,

d'où il résulte la contradiction $C > C$. Il faut donc écarter ce sous-cas.

Sous-cas b)

$$A+C=B+10 \qquad (4)$$

$$A+B+1=D \qquad (5).$$

En additionnant membre à membre (1), (4) et (5), on arrive à $A = 3$.

Cas 2

$$A+D=C+10 \qquad (6)$$

Sous-cas a)

$$A+C+1=B \qquad (7)$$

$$A+B=D \qquad (8).$$

En additionnant membre à membre (6), (7) et (8) on arrive encore une fois à $A = 3$.

Sous-cas b)

$$A+C+1=B+10 \qquad (9)$$

$$A+B+1=D \qquad (10).$$

En additionnant membre à membre (6), (9) et (10), on arrive à $A = 6$.

Par le même raisonnement, on conclura que $E = 3$ ou $E = 6$. Mais, puisque $A < E$, on devra poser: $A = 3$ et $E = 6$. Cela indique que seul le sous-cas 2b doit être retenu pour la deuxième somme et que le sous-cas 2b doit être écarté pour la première.

Dans le sous-cas 2b pour la deuxième somme, on obtient les relations

$$6+H=G+10 \qquad (11)$$

$$6+G+1=F+10 \qquad (12)$$

$$6+F+1=H \qquad (13)$$

(13) entraîne $H \geqslant 8$.

Si $H = 8$, alors $F = 1$ et $G = 4$.

Si $H = 9$, alors $F = 2$ et $G = 5$.

Supposons que $F = 1$, $G = 4$ et $H = 8$. Supposons aussi que le sous-cas 1b s'applique à la première somme. On a donc

$$3+D=C \qquad (1^*)$$

$$3+C=B+10 \qquad (4^*)$$

$$3+B+1=D \qquad (5^*)$$

En vertu de (1*) et des assignations antérieures, on aurait

$C = 5$, $C = 7$ ou $C = 9$.

Si $C = 5$, alors $D = 2$, ce qui est incompatible avec (5*).

Si $C = 7$, alors $D = 4$, ce qui est incompatible avec le fait que $G = 4$.

Si $C = 9$, alors $D = 6$, ce qui est incompatible avec le fait que $E = 6$.

Donc le sous-cas 1b ne peut s'appliquer à la première somme. Pour 2a appliqué à la première somme, on obtient une situation analogue à 1b, mais avec permutation des lettres; il faut donc, pour les mêmes raisons, écarter ce sous-cas. Il s'ensuit que les assignations $F = 1$, $G = 4$ et $H = 8$ doivent être écartées. On en conclut que

$F = 2$, $G = 5$ et $H = 9$.

Supposons alors que le sous-cas 1b s'applique à la première somme. On a donc

$$3+D = C \qquad (1^*)$$

$$3+C = B+10 \qquad (4^*)$$

$$3+B+1 = D \qquad (5^*)$$

En vertu de (1*) et des assignations antérieures, on peut avoir $C = 4$, $C = 7$ ou $C = 8$. Mais :

$C = 4$ est incompatible avec (4*).

$C = 7$ entraîne $B = 0$, ce que nous avons écarté au départ.

$C = 8$ entraîne $D = 5$, ce qui contredit le fait que $G = 5$.

Le sous-cas 1b ne peut donc s'appliquer à la première somme et on doit se restreindre au sous-cas 2a. On a donc

$$3+D = C+10 \qquad (6^*)$$

$$3+C+1 = B \qquad (7^*)$$

$$3+B = D \qquad (8^*)$$

En vertu de (8*) et des assignations antérieures, on peut avoir $D = 4$, $D = 7$ ou $D = 8$.

Mais $D = 4$ est incompatible avec (6*).

$D = 8$ entraîne $B = 5$ qui est incompatible avec $G = 5$.

Il reste le seul cas $D = 7$ qui entraîne $B = 4$ et $C = 0$. D'où la solution:

$$\begin{array}{r} 333 \\ +\underline{407} \\ 740 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 666 \\ +\underline{259} \\ 925 \end{array}$$

QUESTION 6 (Le nombre 11111011111)

Sachant que le nombre 11111 est égal à 41 multiplié par 271, trouver quatre nombres entiers positifs $x < y < z < t$ dont le produit $xyzt$ soit égal au nombre 11111011111.

SOLUTION

$11111011111 = 11111 \times 1000001 = 41 \times 271 \times (10^6+1)$.

Or, $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Donc, $10^6+1 = (10^2+1)(10^4-10^2+1) = 101 \times 9901$.

D'où, $11111011111 = 41 \times 101 \times 271 \times 9901$.

Réponse: $x = 41$, $y = 101$, $z = 271$ et $t = 9901$.

Note

Par mégarde, les membres du comité chargé de concevoir le questionnaire du concours n'ont pas remarqué qu'il existait une solution triviale: $x = 1$, $y = 41$, $z = 271$ et t = 1000001. Il aurait été désirable de formuler la question en spécifiant que les facteurs recherchés doivent être distincts de 1.
