COUPONS DES GÂTEAUX MATHÉMATIQUES

Jacques Labelle, Ph. D.

Dans cet article, nous éconçons et prouvons quelques théorèmes classiques de topologie: le théorème *de la valeur intermédiaire*, le théorème *du point fixe* de Broüwer... Ces théorèmes sont ensuite utilisés pour «couper des gâteaux mathématiques».

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $I = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Théorème 1 (de la valeur intermédiaire)

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(0) \cdot f(1) \leqslant 0$, alors il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$.

Démonstration

Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 0$, alors il n'y a rien a démontrer. Supposons donc $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. (Le cas $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$ est semblable). Comme la fonction f est continue, son graphe est une courbe continue reliant le point $(0,f(0))$ (sous l'axe des x) au point $(1,f(1))$ (au-dessus de l'axe des x):

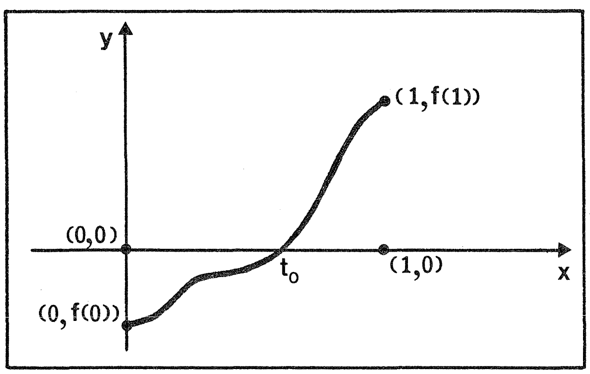

Fig. 1

Il est évident que cette courbe coupe l'axe des x en au moins un point $(t_0,f(t_0))$ (où on a donc $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$ et $f(t_0) = 0$).

Théorème 2 (de Broüwer (en dimension un))

Soit $g : I \rightarrow I$ une fonction continue. Alors il existe au moins un $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = t_0$. (Un tel t_0 est appelé un *point fixe* de g.)

Démonstration

Si $g(0) = 0$, alors 0 est un point fixe de g; et de même, si $g(1) = 1$, 1 est un point fixe de g. Supposons donc $g(0) > 0$ et $g(1) < 1$, et considérons la fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(t) = t - g(t).$$

Comme on a $f(0) \cdot f(1) = -g(0) \cdot (1-g(1)) < 0$ (puisque $g(0) > 0$ et $1-g(1) > 0$) le théorème de la valeur intermédiaire nous assure de l'existence d'un $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$, i.e. tel que $t_0 = g(t_0)$. La fonction g admet donc un point fixe.

Remarque 1

Le théorème de Broüwer en dimension n (qui suit) est également vrai mais sa démonstration est beaucoup plus sophistiquée.

Théorème

Soit I^n le cube de dimension n, $n \geqslant 1$, et soit $f : I^n \rightarrow I^n$ une fonction continue. Alors f admet au moins un point fixe.

Par exemple, pour $n = 2$, ce théorème a le corollaire suivant: Si deux feuilles de papier carrées sont placées l'une sur l'autre et si l'on plie, froisse, écrabouille et aplatit (mais sans déchirer) celle du dessus sur celle du dessous alors au moins deux points initialement l'un sur l'autre le seront également après cette opération.

Théorème 3

Soit $\mathbb{S}^1$ l'ensemble des points du plan cartésien à une distance 1 de l'origine, c'est-à-dire supposons que $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$. Si h est une fonction continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe au moins un point (x,y) tel que $h(x,y) = h(-x,-y)$. En d'autres mots, il existe deux points diamétralement opposés ayant même image par h.

Démonstration

Considérons la fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(t) = h(\cos \pi t, \sin \pi t) - h(-\cos \pi t, -\sin \pi t).$$

On a:

$$\begin{aligned} f(0) \cdot f(1) & \\ &= (h(1,0)-h(-1,0)) \cdot (h(-1,0)-h(1,0)) \\ &= -(h(1,0)-h(-1,0))^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Le théorème de la valeur intermédiaire nous dit qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$, i.e. tel que $h(\cos \pi t_0, \sin \pi t_0) = h(-\cos \pi t_0, -\sin \pi t_0)$. En d'autres mots, $(\cos \pi t_0, \sin \pi t_0)$ et $(-\cos \pi t_0, -\sin \pi t_0)$ sont deux points de $\mathbb{S}^1$ dia-

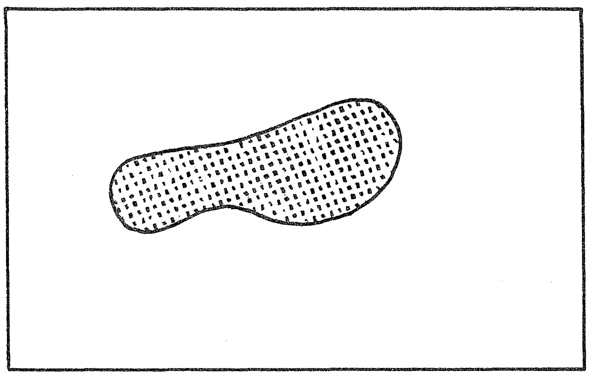

Fig. 2

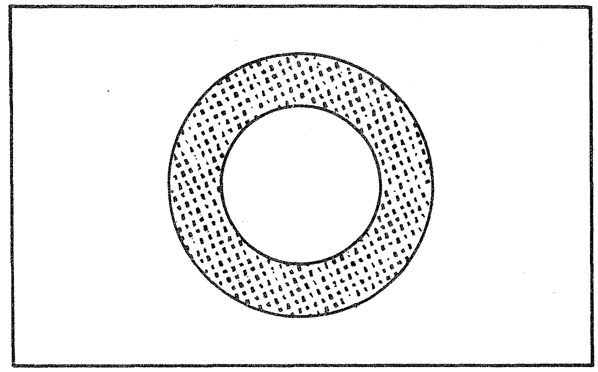

Fig. 3

métralement opposés et ayant même image par h.

Corollaire

Quel que soit le grand cercle sur la sphère terrestre, il admet deux points antipodaux ayant même température.

Remarque 2

Il est également possible (mais en utilisant des résultats (de topologie algébrique) un peu plus sophistiqués) de démontrer que toute fonction continue de la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ admet deux points antipodaux ayant même image. Il y a donc, à tout moment, sur la surface terrestre au moins deux points antipodaux ayant en même temps la même température et la même pression atmosphérique.

Définition

Un gâteau mathématique est une région, bornée et de dimension deux, du plan cartésien.

Remarque 3

Bien sûr, dans la vie courante, un gâteau est toujours un solide à trois dimensions (autrement ce ne serait pas nourissant!). La notion de gâteau mathématique modélise donc les gâteaux réels où l'on suppose la base et le dessus parfaitement horizontaux et les parois parfaitement verticales. Par exemple un beau gâteau de fête (plus ou moins rond et sans les chandelles (fig. 2)), ou un gâteau des anges (figure 3). En d'autres mots, nous étudions les gâteaux placés sur un plan et admettant une hauteur constante. Comme nous nous intéressons à la possibilité de couper d'un seul grand coup de couteau vertical le gâteau en deux parties de même volume, ceci revient, dans notre modèle, à trouver une droite du plan cartésien séparant le gâteau mathématique en deux parties (sous-gâteaux) de même aire.

Remarque 4

Un gâteau mathématique peut très bien ne pas être connexe (i.e. admettre plusieurs morceaux) (fig. 4). Notez également qu'un gâteau mathématique connexe peut très bien, par une droite, être coupé en deux sous-gâteaux non-connexes (fig. 5).

Théorème 4

Soit G un gâteau mathématique et L une droite. Alors il existe une droite D, parallèle à L, et coupant G en deux parties de même aire.

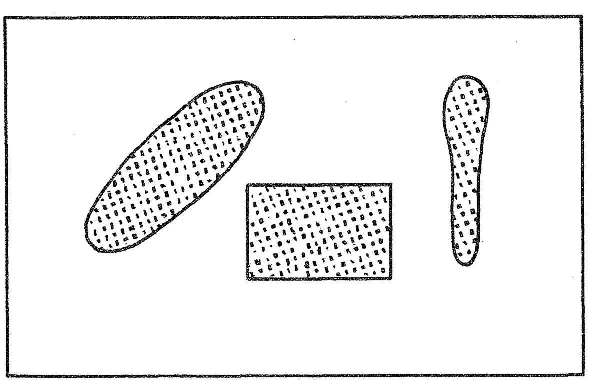

Fig. 4

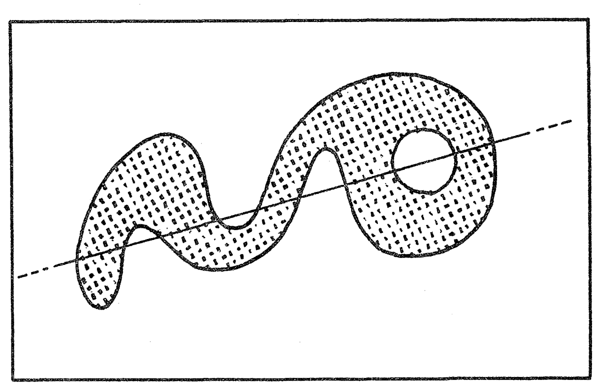

Fig. 5

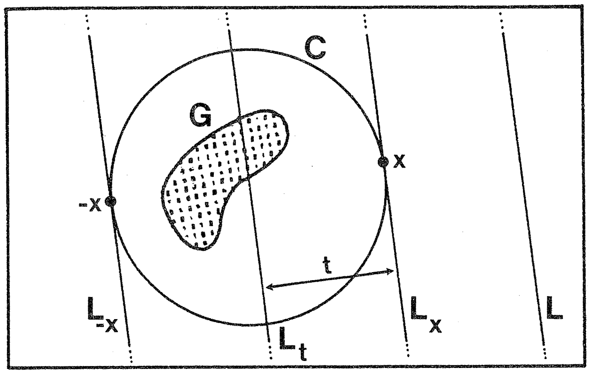

Fig. 6

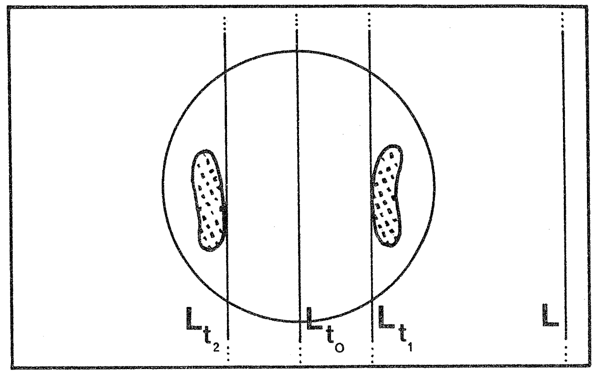

Fig. 7

Démonstration

Puisque G est borné, plaçons-le sur une assiette circulaire C que , par un nouveau choix d'unité de longueur, nous supposons de diamètre 1.

Soit L_x et L_{-x} les deux droites, parallèles à L et tangentes à C, respectivement aux point x et $-x$ (fig. 6). Puisque C est de diamètre 1 et que x et $-x$ sont diamétralement opposés, les droites L_x et L_{-x} sont à une distance 1.

Pour $t \in I = [0,1]$, soit L_t la droite entre L_x et L_{-x} et parallèle à L, qui est à une distance t de L_x. Soit $g_2(t)$ l'aire de la portion de G entre L_t et L_{-x}, et $g_1(t)$ l'aire de la portion de G entre L_t et L_x. Posons $f(t) = g_2(t) - g_1(t)$. Il est clair que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue décroissante telle que $f(0) = A$ et $f(1) = -A$ où A est l'aire de G. Comme $f(0) \cdot f(1) = -A^2 \leqslant 0$, le théorème de la valeur intermédiaire nous assure de l'existence de $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$. En d'autres mots, la droite $D = L_{t_0}$ (parallèle à L) coupe le gâteau G en deux parties égales d'aires $g_2(t_0) = g_1(t_0) = A/2$.

Remarque 5

Notez que, lorsque G n'est pas connexe, la droite (parallèle à L) coupant G en deux parties égales peut ne pas être unique (fig. 7).

En fait, puisque f est décroissante, $\{t \mid f(t) = 0\}$ sera un intervalle fermé $[t_1, t_2]$ dont le point milieu est $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Dans une telle situation, nous choisirons toujours la droite $D = L_{t_0}$ coupant G en deux portions égales.

Passons à un problème plus difficile. Étant donné deux gâteaux mathématiques G_1 et G_2, existe-t-il une droite coupant *simultanément* G_1 et G_2 en deux parties égales?

Théorème 5

Si G_1 et G_2 sont deux gâteaux mathématiques alors il existe une droite coupant simultanément chacun des deux gâteaux en deux parties égales.

Démonstration

Comme précédemment, plaçons G_1 et G_2 sur une assiette circulaire C de diamètre 1. Soit x un point quelconque mais arbitraire de C. La construction précédente, appliquée au premier gâteau G_1 et à la droite $L = L_x$, détermine une unique droite, que nous noterons D_x (puisqu'elle dépend de x) coupant G_1 en deux parties égales. Cette droite «coupe» également le deuxième gâteau G_2 en deux parties (l'une pouvant être vide). Soit $h_2(x)$ l'aire de la portion de G_2 entre L_{-x} et D_x, et $h_1(x)$ l'aire de la portion de G_2 entre D_x et L_x (fig. 8).

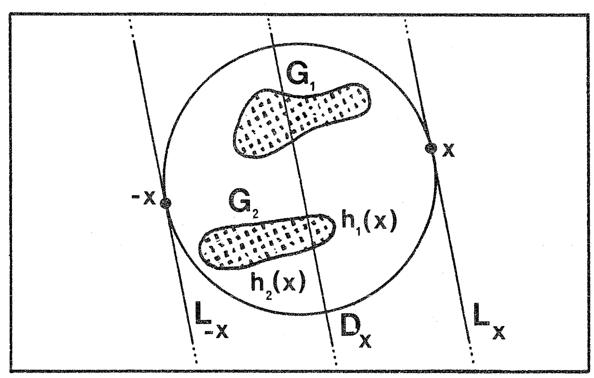

Fig. 8

Posons $h(x) = h_2(x) - h_1(x)$. La fonction $h : C \to \mathbb{R}$ est continue. Le théorème 3 nous assure donc de l'existence de $x_0 \in C$ tel que $h(x_0) = h(-x_0)$, i.e. x_0 et $-x_0$ sont deux points de C diamétralement opposés et ayant même image par h. Notons cependant que quel que soit $x \in C$, on a par construction $D_x = D_{-x}$; d'où $h_2(x) = h_1(-x)$, $h_1(x) = h_2(-x)$ et $h(x) = h_2(x) - h_1(x) = h_1(-x) - h_2(-x) = -(h_2(-x) - h_1(-x) = -h(-x)$. Pour le point x_0 on a donc $h(x_0) = h(-x_0) = -h(x_0)$, d'où $h(x_0) = 0$, i.e. $g_2(x_0) = g_1(x_0)$. En d'autres mots, la droite L_{x_0} qui, par construction, coupe le gâteau G_1 en deux portions égales coupera également le gâteau G_2 en deux portions égales.

Remarque 6

Dans certains cas, les droites dont l'existence est assurée par les théorèmes 4 et 5 sont faciles à trouver. Par exemple, si G est un gâteau mathématique circulaire ou en couronne (i.e. un gâteau des anges), ou s'il a comme frontière un polygone régulier convexe ayant un nombre pair de côtés, alors toute droite passant par son centre le coupera en deux portions égales. Si G_1 et G_2 sont de tels gâteaux, la droite passant par leurs deux centres sera l'unique droite les coupant simultanément en deux portions égales.

Remarque 7

Dans le théorème 5, rien n'oblige les gâteaux à être disjoints. Par exemple, quel que soit le gâteau à deux étages: G_1 et G_2, il existe un plan vertical coupant simultanément les deux étages (et donc le gâteau lui-même) en deux portions égales. De même, pour un gâteau de fête dont les chandelles (cylindriques et plantées verticalement) sont de nombre et de forme quelconques mais de même longueur, il existe un plan vertical coupant le gâteau en deux portions égales et les chandelles en deux volumes égaux de cire (ce plan pouvant très bien trancher quelques chandelles). Il suffit en effet d'imaginer le deuxième gâteau G_2 (en général non-connexe) comme étant fait de cire.

Remarque 8

Un argument un peu plus astucieux mais n'utilisant que les quatre premiers théorèmes de cet article permet de prouver le théorème suivant:

Théorème

Soit $G \subseteq \mathbb{R}^2$ un gâteau mathématique. Alors il existe deux droites perpendiculaires coupant G en quatre portions égales.

Remarque 9

Le théorème 5 se généralise en dimension n:

Théorème

Étant donné n gâteaux (i.e. des solides bornés (pas nécessairement connexes) de dimension n) dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de demension n, il existe au moins un hyperplan coupant simultanément chacun des gâteaux en deux portions égales.

En particulier, si G_1, G_2 et G_3 sont de vrais gâteaux flottant dans l'espace, il existe à tout moment un plan les tranchant simultanément en deux portions égales.

Tu veux donner un atelier à l'occasion du 25^e anniversaire de fondation de l'AMQ: envoie immédiatement ton sujet; ta participation est importante!