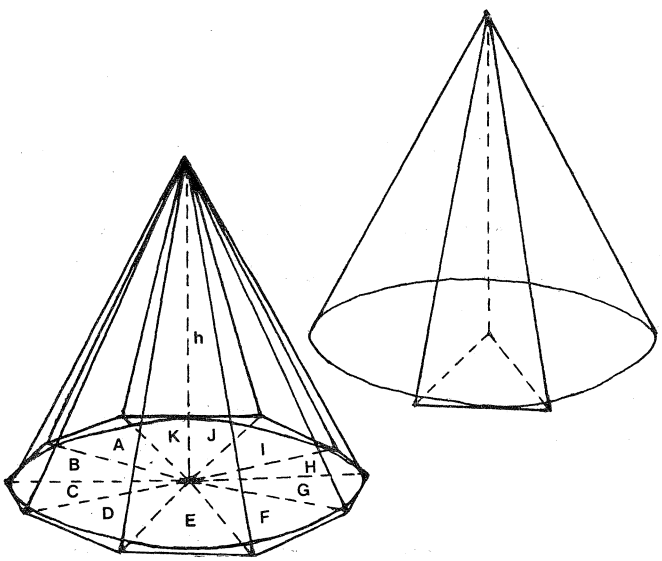
PENSER LA SPHÈRE[1] (suite)

Jean-Marie Huard
Cégep du Vieux-Montréal

Instruction 5: Volume d'une pomme de pin (cône)

Au tour du cône! On peut voir le cône comme étant un assemblage de pyramides triangulaires.



De la figure ci-dessus, on tire le résultat suivant (où A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et K représentent les bases des pyramides triangulaires et h, la hauteur de ces pyramides):

$$\text{volume de toutes les pyramides} = \frac{(A \times h)}{3} + \ldots + \frac{(K \times h)}{3}$$

$$= \frac{(A + \ldots + K) \times h}{3}$$

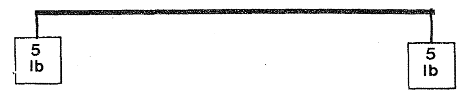
$$= \frac{\text{étendue de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

En ayant de plus en plus de pyramides, on s'approche de plus en plus du cône, d'où:

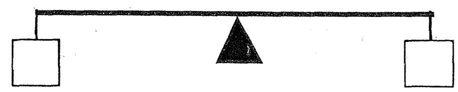
$$\text{volume du cône} = \frac{\text{étendue de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Instruction 6: La balance

Soit une tige où l'on a attaché les poids suivants:

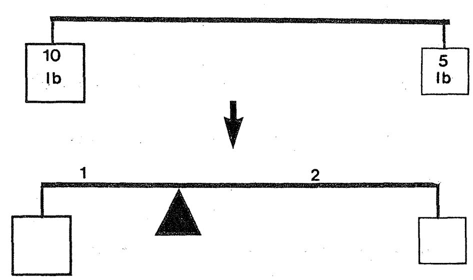


Par où doit-on prendre la tige pour obtenir l'équilibre?

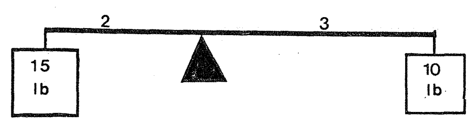


Bien sûr!

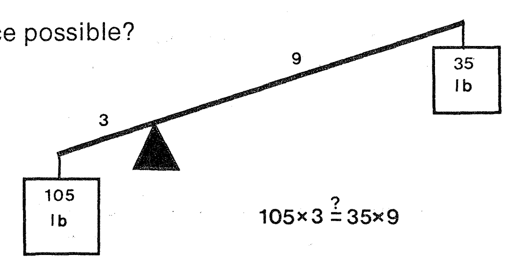
Maintenant, si la situation est la suivante:



Pour des poids de 15 lb et 10 lb, nous aurons:

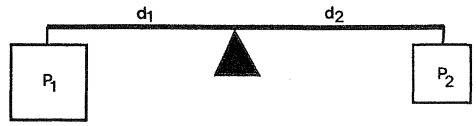


Est-ce possible?



$105 \times 3 \stackrel{?}{=} 35 \times 9$

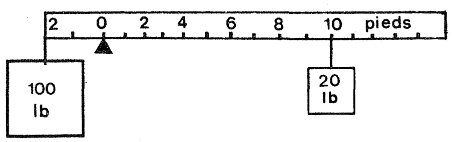
1. Document-compagnon pour le récital mathématique donné par Jean-Marie Huard au Bistro à Jojo le 15 décembre 1980. La première version de ce document a été réalisée par Marie-Célyne Poupart.

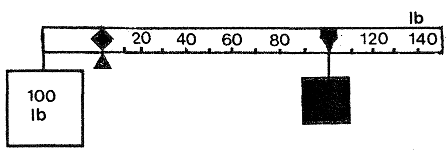


Pour avoir l'équilibre, il faut donc que:

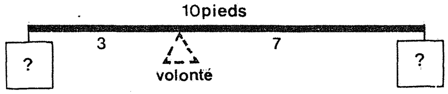
$$P_1 \times d_1 = d_2 \times P_2$$

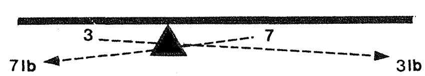
sinon il y a déséquilibre.

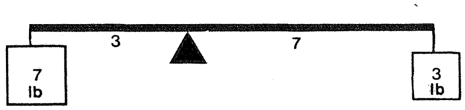




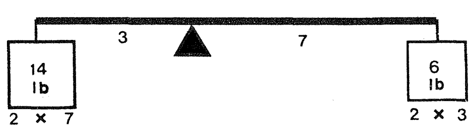
Prenons un support de balance (**attention**: tous les supports dans cet exposé sont de poids très faibles par rapport aux poids attachés) et ayons la fantaisie de déterminer les poids qu'on peut attacher aux bouts pour que le centre de gravité soit où l'on veut.



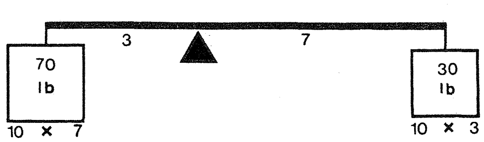




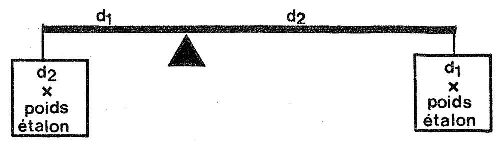
Ou encore...



ou encore...

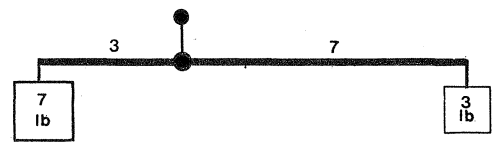


Donc, Archimède dixit:

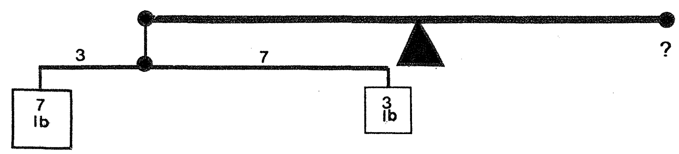


$$(d_2 \text{ lb}) \times d_1 = d_2 \times (d_1 \text{ lb})$$

Prenons ce système,

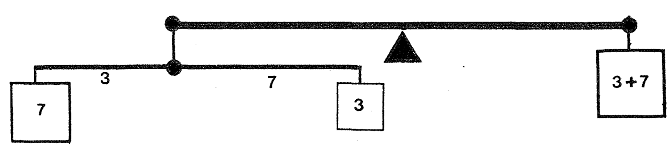


que nous accrochons au fléau d'une balance dont le point d'appui est au centre.

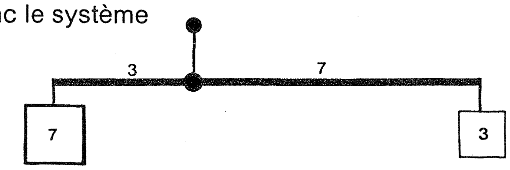


Que devons-nous accrocher à l'autre bout pour avoir l'équilibre? L'expérience nous montre que c'est:

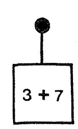
7 lb + 3 lb



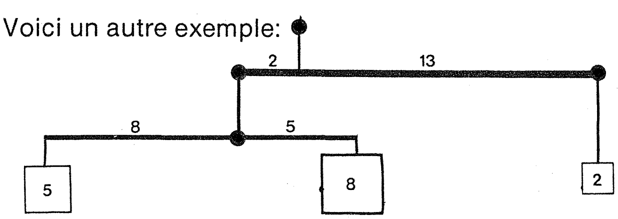
Donc le système



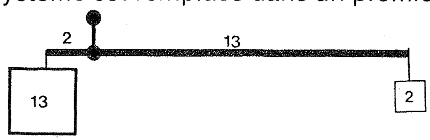
peut être remplacé par



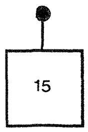
Voici un autre exemple:



Ce système est remplacé dans un premier temps par:



puis par:

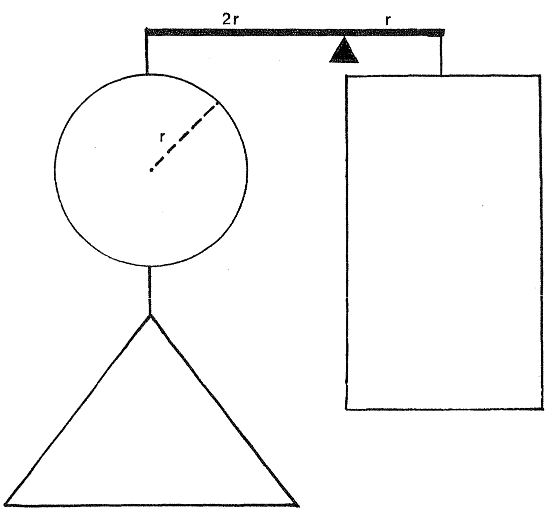


Attention:

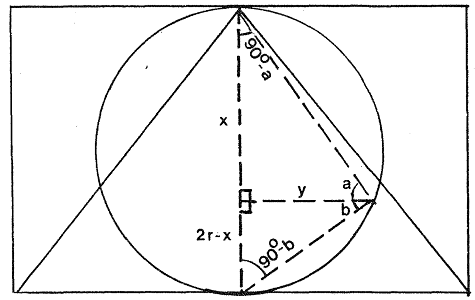
$$\boxed{15} = \boxed{5} + \boxed{8} + \boxed{2}$$

Instruction 7: Volume de la sphère d'Archimède

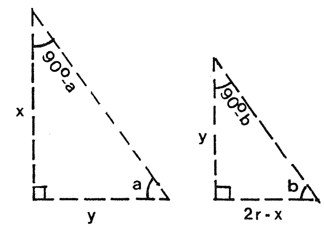
Forts de nos connaissances récemment acquises (truc de la balance, truc de Cavalieri, volume d'un cylindre, volume d'un cône), nous allons maintenant contempler l'ingéniosité d'Archimède pour trouver le volume d'une sphère.



Archimède prend une balance à fléau. Il accroche à un bras un cylindre (volume) de poids connu et à l'autre bras, un cône (volume) de poids connu et une sphère (volume) de poids inconnu. Archimède ajuste la longueur des bras, constate l'équilibre et, de ce fait, trouve le volume de la sphère.



Constatons l'équilibre obtenu. Pour ce, raisonnons sur la figure ci-dessus.
Les deux triangles pointillés sont semblables.



En effet: $\hat{a} + \hat{b} = 90°$ (angle opposé au diamètre)

$$\hat{a} = 90° - \hat{b}$$

$$\hat{b} = 90° - \hat{a}$$

D'où:

$$\frac{y}{2r - x} = \frac{x}{y}$$

$$y^2 = (2r - x) \times x$$

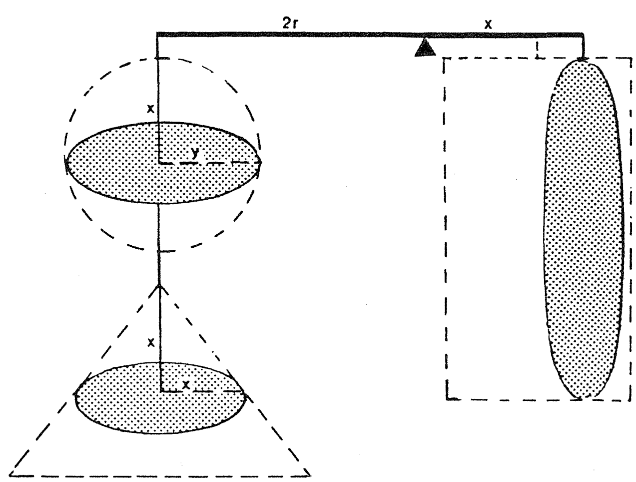
$$y^2 = 2rx - x^2$$

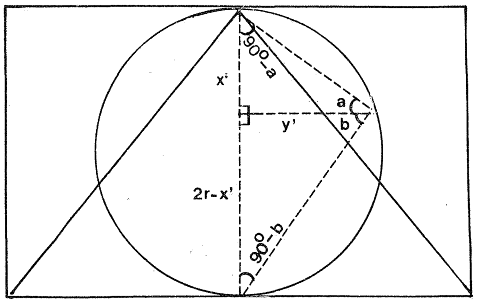
$$x^2 + y^2 = 2rx$$

$$\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2rx \quad \text{(en multipliant par } \pi\text{)}$$

$$(\pi x^2 + \pi y^2)2r = \pi(2r)^2 x \quad \text{(en multipliant par 2r)}$$

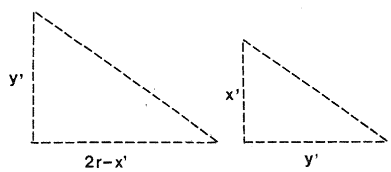
Et maintenant, superposons des sections de la sphère, du cône et du cylindre comme suit, et constatons.





Ce qui précède constitue le premier cas du constat d'équilibre; nous devons aussi considérer le cas suivant si nous voulons que notre raisonnement soit complet.

Les deux triangles pointillés sont semblables.



En effet:

$$\hat{a} + \hat{b} = 90° \implies \begin{cases} \hat{a} = 90° - \hat{b} \\ \hat{b} = 90° - \hat{a} \end{cases}$$

D'où:

$$\frac{y'}{2r - x'} = \frac{x'}{y'}$$

$$y'^2 = (2r - x') \times x'$$

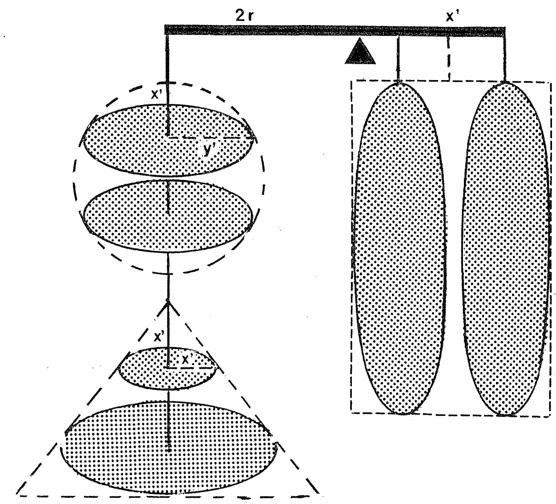
$$y'^2 = 2rx' - x'^2$$

$$x'^2 + y'^2 = 2rx'$$

$$\pi x'^2 + \pi y'^2 = \pi 2rx' \quad \text{(en multipliant par } \pi)$$

$$(\pi x'^2 + \pi y'^2)2r = \pi(2r)^2x' \quad \text{(en multipliant par 2r)}$$

Maintenant, superposons d'autres sections de la sphère, du cône et du cylindre comme suit, et constatons.

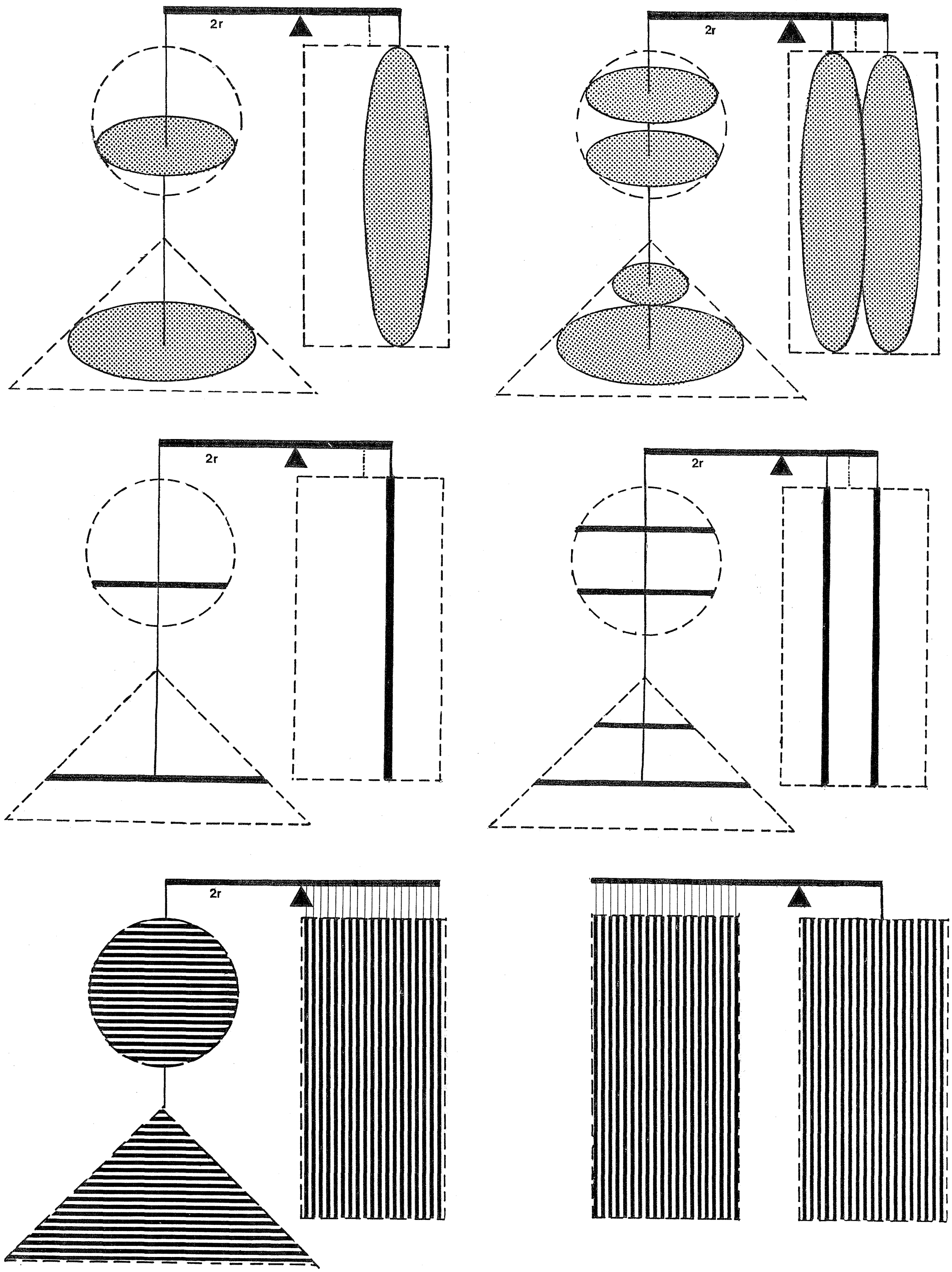


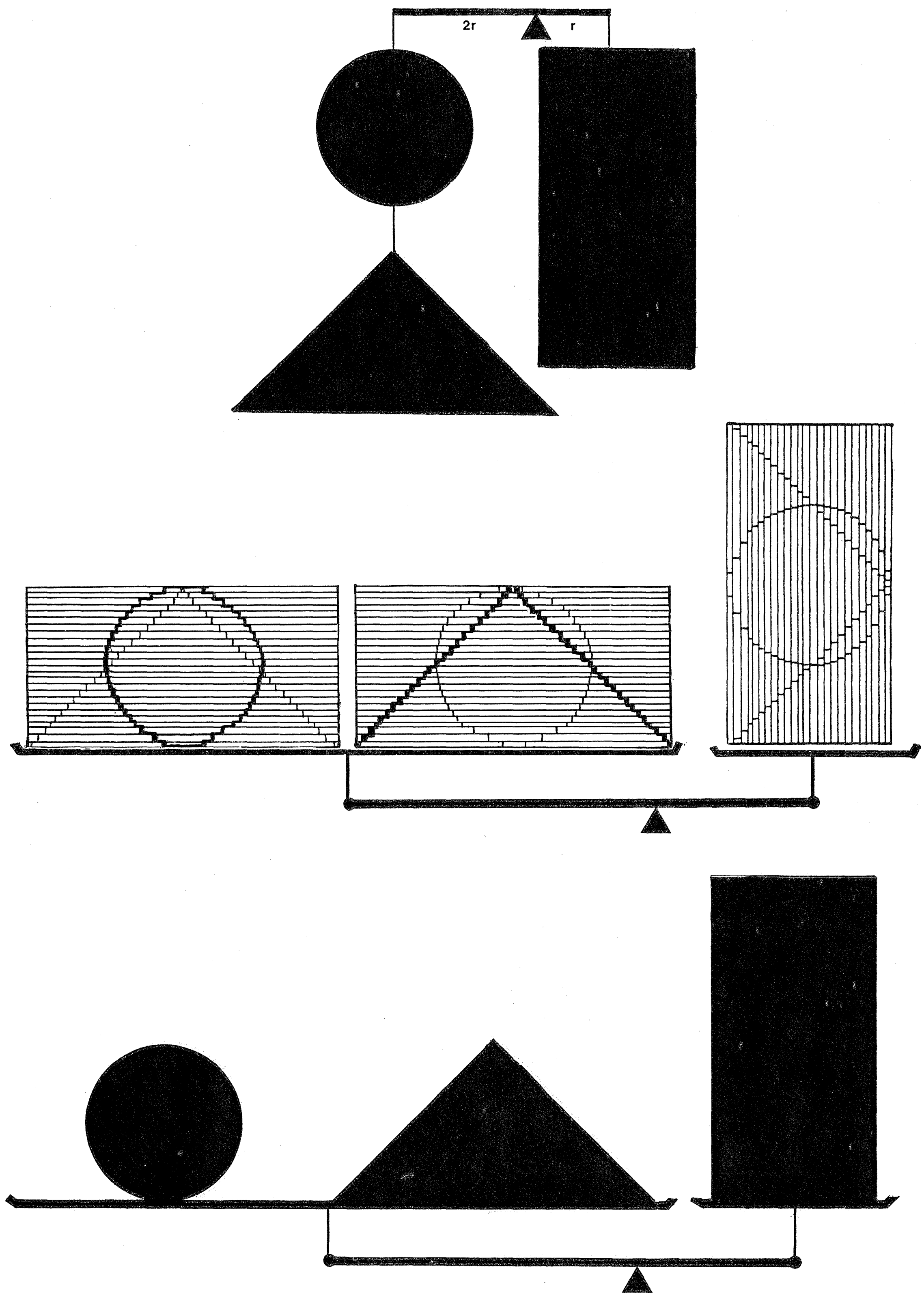
Sur les pages suivantes, on trouve une genèse complète du raisonnement effectué par le génial Archimède.

ERRATA

Dans le numéro de décembre 1982, page 17, il aurait fallu lire: le nouveau directeur du **bulletin de l'AMQ**, au lieu de: le nouveau **directeur de l'AMQ**.

Le CPIQ (Conseil pédagogique interdisciplinaire du Québec) a son bulletin d'information: l'*Intersection*. En décembre 1982, c'était sa première parution. Le CPIQ qui regroupe actuellement vingt-trois associations professionnelles dont l'AMQ compte plus de 10 000 membres enseignant à tous les niveaux, de la maternelle à l'université.


2r
2r
2r
2r
2r


2r
r

Le tout s'équilibre!!! Par le principe sur les bras de levier, nous en déduisons que:

(volume de la sphère + volume du cône) × distance au bras de levier

= volume du cylindre × distance au bras de levier

$$\left(? + \frac{\pi(2r)^2 \times 2r}{3}\right) \times 2r = \pi \times (2r)^2 \times 2r \times r$$

$$\left(? + \frac{\pi(2r)^2 \times 2r}{3}\right) = \pi \times (2r)^2 \times 1 \times r$$

$$\left(? + \frac{8\pi r^3}{3}\right) = 4\pi r^3$$

$$? + \frac{8\pi r^3}{3} = 4\pi r^3$$

$$? = 4\pi r^3 - \frac{8\pi r^3}{3}$$

$$? = \frac{12\pi r^3 - 8\pi r^3}{3}$$

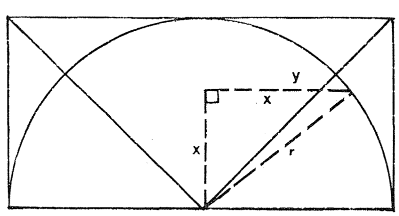
$$? = \frac{4\pi r^3}{3}$$

On peut donc conclure:

$$\text{volume de la sphère} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Instruction 8: L'idée d'Archimède simplifiée

Même le raisonnement du grand Archimède peut être simplifié. Voici une façon plus simple pour trouver le volume d'une sphère, façon qui est probablement le fruit d'un accident ou d'un incident de travail.



Par Pythagore: $x^2 + y^2 = r^2$

$\pi x^2 + \pi y^2 = \pi r^2$

D'où:

étendue du cône
+ étendue de la demi-sphère
étendue du cylindre

En accumulant des sections et en se servant du principe de Cavalieri, on en déduit que:

vol. de la demi-sphère + vol. du cône = vol. du cylindre

$$? + \frac{\pi r^2 \times r}{3} = \pi r^2 \times r$$

$$? = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}$$

$$? = \frac{3\pi r^3 - \pi r^3}{3}$$

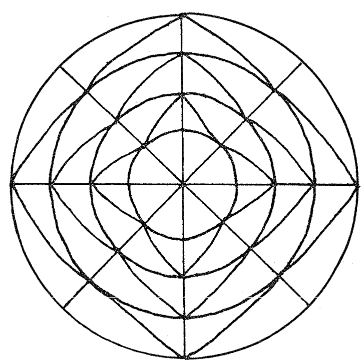
$$? = \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$\Longrightarrow \text{volume de la sphère} = 2 \times \frac{2\pi r^3}{3}$$

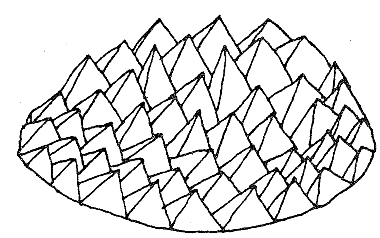
$$\text{volume de la sphère} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Instruction 9: Lit de Fakir (surface de la sphère)

Sur la sphère, dessinons des triangles. Les triangles et le centre de la sphère forment des pyramides dont la base est bancale.



Regardons la sphère comme étant un assemblage de ces pyramides bancales. Déplions la sphère et nous sommes en présence d'un «lit de Fakir» ayant l'aspect suivant.



Ce lit de Fakir permet d'évaluer la surface de la sphère.

En effet:

volume de la sphère

$= $ la somme des volumes des pyramides

$= \dfrac{\text{étendue de la base de la } 1^{re} \text{ pyramide} \times r}{3}$

$+ \dfrac{\text{étendue de la base de la } 2^{e} \text{ pyramide} \times r}{3}$

$+ \ldots$

$=$ (étendue de la base de la 1^{re} pyramide + étendue de la base de la 2^{e} pyramide + ...) $\times r/3$

$=$ surface de la sphère $\times r/3$

Or le volume de la sphère est égal à $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

$$\Longrightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \text{surface de la sphère} \times \frac{r}{3}$$

D'où:

$$\text{surface de la sphère} = 4\pi r^2$$

MOT DE LA FIN

Le mot «pensée» origine du mot «pesée».

Errata

Dans le numéro de décembre 1982, page 27, il faudrait ajouter après la 4^e ligne de la colonne de droite: La somme des angles intérieurs d'un triangle égale 180°.

Dans le même numéro, page 41, il faudrait ajouter à la fin de l'article: Suite au prochain numéro.