LA LEÇON... DE MATHÉMATIQUE

Denis Therrien
Département de didactique
Université Laval

Voici notre brave professeur Logimath en train d'expliquer à ses étudiants le sens des nombres irrationnels et cela en conformité avec le nouveau programme et bien entendu le manuel approuvé par le M.E.Q.

Il définit magistralement: « Les nombres irrationnels sont ceux qui ne sont pas rationnels. » Pour appuyer cette Lapalissade, il donne une série d'exemples des plus pertinemment classiques: π, e, $\sqrt{2}$, ...

En toute bonne logique et selon la notation polonaise inversée, il veut ensuite expliquer ce que sont les nombres rationnels. Alors il dit d'un ton neutre: « Les nombres rationnels sont des objets de la forme a/b où a et b sont des entiers avec l'interdiction formelle que b soit égal à zéro (0). »

Un élève chuchote à son voisin: « Le prof. il est hot! Ce que nous appelons de vulgaires fractions, lui, il appelle ça des *numerus rationalis.* » Un autre à l'esprit déductif conclut dubitativement: « Comment peut-il y avoir d'autres nombres que des nombres rationnels ? »

Notre brave prof., non moins perspicace que brave, croit déceler que le message ne passe pas très bien... Aussi ajoute-t-il (sans répéter et pour simplifier): « Les nombres rationnels peuvent s'écrire avec un développement (ne pas confondre avec le terme photographique) limité ou illimité mais périodique. »

Voilà qu'un petit malin croit pouvoir l'embarrasser: « Monsieur, voici un nombre de la forme a/b qui n'est pas périodique: 355/113 = 3,14159292035398230088. »

Notre bon prof. Logimath n'est pas du tout décontenancé car il *sait,* lui, que ce n'est pas possible. Mais voilà, il est un peu ennuyé... Si seulement il pouvait recourir à ces damnées calculatrices dont il a vanté les vertus émérites ! Force lui est donnée de reprendre la bonne vieille craie (le bâton du pélerin) pour entreprendre un calcul d'environ une demi-heure, accompagné d'un chahut indescriptible. Enfin, notre prof. annonce triomphalement que la période de ce nombre est de 112 chiffres ! [1] Il en profite pour admonester ses étudiants à propos des dangers et de la perversité de l'induction. Il sera désormais défendu de faire de l'exploration numérique !

Maintenant que le calme est revenu, le professeur annonce, avec une voix qui se veut la plus naturelle possible, qu'il y a effectivement des nombres dont le développement décimal est illimité et non périodique. Suit un exemple qui va de nouveau mettre le feu aux poudres:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$$

« Mais monsieur, on ne pourra jamais savoir... »

En guise de réponse, le prof. montre — avec la preuve classique — comment le fait d'affirmer que $\sqrt{2}$ serait de la forme a/b, conduit à une contradiction.

Les élèves sont mystifiés, désabusés, frustrés... ! L'un d'eux revient à la charge: « Monsieur ces nombres me paraissent inachevés ! »

Le professeur: « Comment cela ? »

L'élève: « $1 < 1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < 1{,}41421 < 1{,}414213 < 1{,}4142136$. C'est donc dire que plus j'ajoute de décimales, plus le nombre grossit et de cette façon il ne sera jamais fixé ! »

Au même moment, on frappe à la porte. C'est le prof. Dubitamath. Ce dernier entre dans le vif du sujet en proposant que $\sqrt{2}$ représente la longueur du côté d'un carré dont l'aire est 2. Il suggère ensuite de trouver l'aire des carrés suivants:

côté	aire	côté	aire
1,4	1,96	1,5	2,25
1,41	1,9881	1,42	2,0164
1,414	1,999396	1,415	2,002225
...	...	...	...

d'où l'on conclut, par exemple, que 1,41 est plus petit que $\sqrt{2}$ mais 1,42 est plus grand. Donc, $\sqrt{2}$ se situe quelque part entre 1,41 et 1,42 et ainsi de suite.

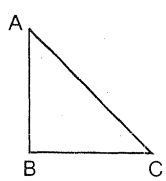
Le prof. Dubitamath semble tenir un discours différent à propos des nombres rationnels. Selon lui, ces nombres servent à exprimer le rapport qui existe entre deux grandeurs mesurables. C'est ainsi qu'il s'explique: « Quand nous voulons mesurer une longueur, il suffit de choisir une longueur de référence (par exemple le mètre). Si la longueur A est telle qu'elle équivaut à 5 longueurs de 1 mètre, on dira alors que A mesure 5 (mètres). Le nombre 5 est ici un nombre rationnel — on pourrait l'écrire 5/1 —, en ce sens qu'il indique le rapport entre la longueur A et la longueur de 1 mètre. Si l'on choisit une longueur B qui soit plus longue que 4 mètres et plus petite que 5 mètres, on recourt alors à une longueur de référence qui est un sous-multiple du mètre, par exemple un dixième de mètre. Dans ces conditions, on dira par exemple que B mesure 4,3. Si la longueur B est plus grande que 4,3 mètres, sans dépasser 4,4 mètres, on recourra à un nouveau sous-multiple équivalent à un dixième du sous-multiple précédent et ainsi de suite. Il semble donc qu'il soit toujours possible d'exprimer une grandeur en terme d'une autre pourvu que l'on puisse recourir à des sous-grandeurs de plus en plus petites. Dans la pratique, on se contente souvent d'une approximation en stoppant le processus à un moment où les sous-grandeurs sont jugées négligeables. »

L'étudiant à l'esprit déductif et logique conclut alors triomphalement: « Tous les nombres ne peuvent être que rationnels ! »

Dubitamath réplique: « Dans un certain sens tu as raison car le processus de mesure ne fournit que des approximations des grandeurs mesurées. Par exemple, la mesure de l'hypothénuse d'un triangle-rectangle isocèle en termes de son côté nous amène à conclure que cette dernière est 1 fois et 2/5 (7/5 ou 1,4) plus longue que le côté en question. Il s'agit là d'une imprécision insidieuse car la longueur de l'hypothénuse et la longueur de son côté sont des grandeurs incommensurables, comme on peut le constater en utilisant une autre stratégie de mesure [2]. »

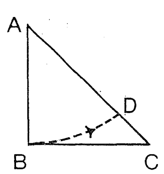
Regardons bien la figure: on veut « voir » que l'hypothénuse d'un triangle-rectangle isocèle (AB = BC) et son côté sont des grandeurs incommensurables.

AB = BC



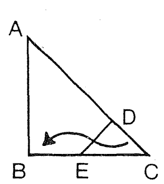
La mesure de AC en terme de AB peut s'effectuer en reportant AB sur AC

AD = AB



En utilisant l'algorithme d'Euclide, on reporte alors DC sur BC

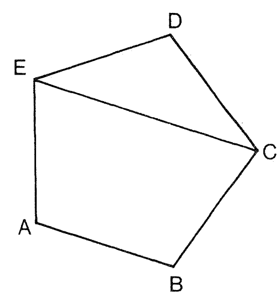
BE = DC



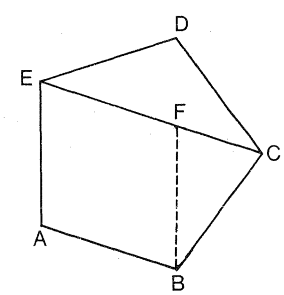
On voit ici que DC peut être contenu deux fois dans BC = AB.

Il reste donc à reporter une autre fois DC sur EC. Mais en traçant la droite ED, on constate que nous sommes en train de comparer de nouveau le côté d'un triangle-rectangle isocèle [3] à son hypothénuse (DC par rapport à EC). En d'autres mots, nous sommes dans la même situation qu'au point de départ. Le recours à des unités plus petites nous amènera à considérer des triangles de plus en plus petits et le processus pourrait se continuer indéfiniment.

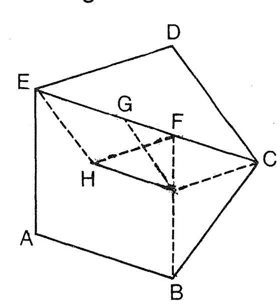
Dubitamath propose alors un second exemple: « La diagonale d'un pentagone régulier et son côté sont aussi des grandeurs incommensurables [4]. »



Nous voulons exprimer la longueur EC en terme de la longueur AB. Dans un premier temps, on reporte AB sur EC:

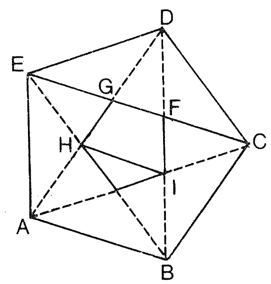


L'excédent FC est reporté sur EF en utilisant la méthode des parallélogrammes:



On trace CI de façon à ce que $\angle FCI = 36°$. Alors CIHF est un losange. Si à partir de E on trace une droite formant un $\angle CEH = 36°$, on aura $EH = FH$. On constate alors que E, H, B sont alignés.

Le second excédent GF sera comparé à $HI = FC$. À ce moment, on constate qu'on est en train de comparer la diagonale d'un nouveau pentagone régulier (tête première dans la figure) à son côté.



Si l'on s'entête à continuer, on verra que l'on tourne en rond. Il n'y a donc pas de commune mesure (si petite soit-elle) entre EC et AB.

Posons $AB = 1$

$$EC = x = AD$$

alors, $FC = x - 1 = GD$

$$GF = 2 - x$$

dans ABD et GFD: $$\frac{AB}{AD} = \frac{GF}{GD}$$

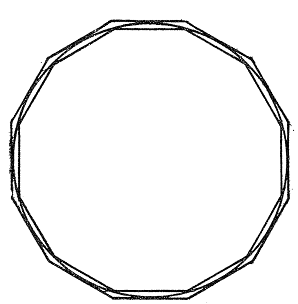
$$\frac{1}{x} = \frac{2-x}{x-1}$$

$$2x - x^2 = x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398...$$

Les étudiants sont encore sous l'effet du choc, mais le professeur Dubitamath est intraitable; il prétend que la longueur de la demi-circonférence de rayon 1 s'exprime par un nombre irrationnel. « En effet, dit-il, cette



longueur est comprise entre la longueur du demi-périmètre d'un polygone inscrit (p) et la longueur du demi-périmètre circonscrit (P). »

Pour des hexagones, nous obtenons

$p = 3$
$P = 2\sqrt{3} = 3{,}4641016$

Pour des dodécagones [5]

$p = 3\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 3{,}1058285\ldots$

$P = 3 \times 2(2 - \sqrt{3}) = 3{,}2153903\ldots$

Si l'on utilise les fonctions trigonométriques, le côté du polygone inscrit de n côtés est égal à sin A où $A = 360/2n$, tandis que le côté du polygone circonscrit est égal à tan A.

Pour un polygone à 36 côtés, on a:
$p = 36 \sin 5° = 3{,}1376067$
$P = 36 \tan 5° = 3{,}1495918$

Pour un polygone à 180 côtés, on a:
$p = 180 \sin 1° = 3{,}1414329$
$P = 180 \tan 1° = 3{,}1419114$

Enfin, pour un polygone à 360 côtés, on a:
$p = 360 \sin 0{,}5° = 3{,}1415521$
$P = 360 \tan 0{,}5° = 3{,}1416718$

Donc, le nombre compris entre 3,1415... et 3,1416... correspond à la longueur d'une demi-circonférence de rayon 1. Dans la pratique, on utilise une approximation rationnelle de ce nombre, par exemple, 3,142857..., c'est-à-dire 22/7, ce qui correspond, grosso modo, à assimiler une circonférence à un polygone circonscrit de 120 côtés! C'est aussi à ce résultat qu'on aboutit si l'on effectue la mesure d'une circonférence donnée en termes de son diamètre.

Alors un élève dit : « Les nombres irrationnels c'est en quelque sorte des *idéaux* à atteindre ! »

Notre bon Logimath se sent tout réconforté et propose un nouvel exemple d'un nombre irrationnel plutôt rationnel.

Qui ne connaît pas la publicité tapageuse des banques au sujet des comptes à intérêt quotidien. On y apprend, entre autres, que cela permet de tirer le maximum de votre dollar. De méchantes langues affirment que c'est de la publicité abusive et trompeuse. Voyons cela de plus près. C'est un beau cas de résolution de problème.

Par exemple, il faudra supposer un taux constant pour fin de comparaison.

Supposons donc que je place 1,00 \$ à 100% [6] d'intérêt annuel. À la fin de l'année, mon capital sera devenu

2,00 \$. Si le calcul de l'intérêt se fait aux six mois, alors l'intérêt semi-annuel devient 50% et j'obtiens un capital

$$1{,}00\ \$ \times 150\% = 1{,}50\ \$$$

et, à la fin de l'année

$$1{,}50\ \$ \times 150\% = 2{,}25\ \$$$

En résumé, 1,00 \$ capitalisé 2 fois par année rapporte

$$1{,}00\ \$ \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25\ \$$$

c'est-à-dire

$$(1 + 1/2)^2 \text{ ou } (1{,}5)^2 = 2{,}25\ \$.$$

Si l'on capitalise tous les mois, 1,00 \$ rapportera après un an:

$$(1 + 1/12)^{12} = 2{,}6130352\ \$$$ [7]

Si l'on capitalise quotidiennement, on aura:

$$(1 + 1/365)^{365} = 2{,}7145627\ \$$$ [7]

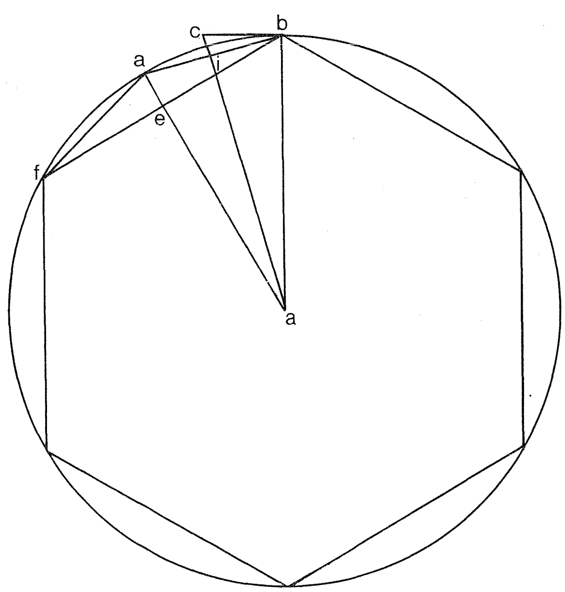
Si l'on capitalise toutes les heures, on aura:

$$365 \times 24 = 8760$$

$$(1 + 1/8760)^{8760} = 2{,}7180139\ \$$$

On constate, dès lors, que la maximalisation d'un dollar par le morcellement de la capitalisation, à l'intérieur d'une année, conduit à un montant limite dont 2,718 est une bonne approximation. Ce nombre se note «e» et constitue la base des logarithmes népériens.

Annexe



$fb = 1,\ eb = 1/2,\ ob = 1 = oc = oa$

$$\text{d'où } eo = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ea = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$ab = \sqrt{(ea)^2 + (eb)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}}$$

$$= 2-\sqrt{3} \qquad \text{(côté du dodécagone inscrit)}$$

$$(bo)^2 = oi \times oc$$

$$oi = \sqrt{(ob)^2 - (bi)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}^{\,2}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$bi = \frac{1}{2}\, ab$$

$$(bo)^2 = 1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \times oc \quad \text{d'où } oc = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$bc = \sqrt{(oc)^2 - (ob)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{2+\sqrt{3}} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{4(2-\sqrt{3})}{1} - 1}$$

$$= \sqrt{8-4\sqrt{3}-1}$$

$$= \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

Le côté du dodécagone circonscrit mesure $2(2-\sqrt{3})$ et le demi-périmètre mesure 3,2153904.

Le côté du dodécagone inscrit mesure $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ et le demi-périmètre mesure 3,1058286.

La longueur de la circonférence est donc comprise entre ces deux longueurs

$$3{,}1058286 < \frac{c}{2} < 3{,}2153904$$

---

1. 3,14159292035398230088495575221238938053097345132743
   362831858407079646017699115044247787610619469026548
   67256637168...

2. Cette méthode est fondée sur l'algorithme d'Euclide et elle consiste à comparer des grandeurs A et B de la façon suivante:

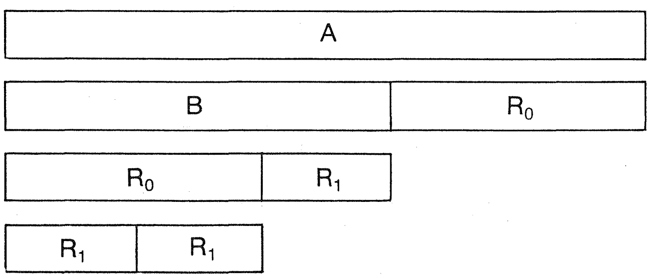
   Soient A = 10 cm et B = 6 cm

   1. B comparé à A produit un reste $R_0 = 4$ cm.
   2. R_0 comparé à B produit un nouveau reste $R_1 = 2$.
   3. R_1 comparé à R_0 ne produit pas de reste.

   On constate alors que R_1 est une grandeur contenue exactement à la fois dans A et dans B.

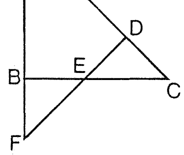
   Ce processus de comparaison des grandeurs résiduelles aux précédentes s'arrête lorsque le reste est zéro.

   Géométriquement, on a:



   Numériquement, on a:
   $10 \div 6 = 1$ reste 4
   $6 \div 4 = 1$ reste 2
   $4 \div 2 = 2$ reste 0.

3. Soit le triangle ABC auquel on applique une rotation de −45° autour du point A, suivie d'une symétrie orthogonale selon l'axe AB. On obtient ainsi le triangle AFD.



   On constate aisément que les triangles EBF et CDE sont des triangles-rectangles isocèles et congruents. Il s'ensuit que le point E appartient à la droite FD. D'où ED = BE et ED est perpendiculaire à AC.

   Posons maintenant AB = 1 et AC = x.

   Alors DC = x − 1 et EC = 1 − (x − 1).

   Les triangles semblables ABC et CDE donnent

   $\frac{AB}{DC} = \frac{AC}{EC}$ c'est-à-dire $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1-(x-1)}$

$$x^2 - x = 2 - x$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}.$$

4. Le rapport entre ces longueurs est appelé nombre d'or ou divine proportion.

5. Voir en annexe des calculs basés sur le théorème de Pythagore.

6. Ce taux farfelu sera normal dans 20 ans!

7. Résultats arrondis.

Le nouveau directeur de l'AMQ:
Jean-Marie Labrie
(514) 659-5892