LES ESPACES TROUÉS

David Kraus
Université de Tel-Aviv

Ce qui suit constitue une esquisse sommaire des notions fondamentales de la théorie des espaces troués, laquelle se situe au carrefour de l'algèbre moderne et de la topologie générale. Ces notions ont été proposées par le Dr. Kraus dans les années 1939 à 1945 [2]. Faute de temps, les sections étoilées n'ont pas été abordées lors de la communication, mais on pourra les omettre lors d'une première lecture. L'auteur a bien voulu proposer également quelques exercices à l'intention des étudiants que le sujet pourra intéresser.

La notion d'espace troué

Soit E un ensemble et soit une partition finie de E donnée:

$$\mathscr{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset \mathscr{P}(E), \text{ avec } m \,\varepsilon\, \mathbb{N} \setminus \{O\}$$

On appelle *espace troué* (dérivé de E et engendré par $\mathscr{F}$) tout ensemble de la forme

$$\mathring{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \setminus (x_{n_1} \cup x_{n_2} \cup \ldots \cup x_{n_k})$$

où $\varnothing \subset \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ et où les x_{n_i} sont différents.

L'emploi de l'expression imagée «espace troué» pour désigner ce type d'ensembles permet de soutenir l'intuition dans la recherche et la vérification de certaines de leurs propriétés globales. Intuitivement, la représentation de la partition $\mathscr{F}$ présente l'allure d'une «carapace de tortue», les éléments de $\mathscr{F} \setminus \mathring{\mathscr{F}}$ apparaissent alors comme des «écailles» de la carapace qui en auraient été soustraites.

Relations entre espaces troués

(1) On désigne par $\overline{\cap}\,(E, \mathscr{F})$ l'ensemble de tous les espaces troués dérivés de E et engendrés par une partition $\mathscr{F}$ donnée. En conservant les notations précédentes, on a

$$\forall \mathring{\alpha} : [\, \mathring{\alpha} \,\varepsilon\, \overline{\cap}\,(E, \mathscr{F})]$$
$$\Longleftrightarrow [\, \exists\, k \,\varepsilon\, \{1, 2, \ldots, m\} : \mathring{\alpha} = \mathscr{F} \setminus \{x_{n_1} \cup x_{n_2} \cup \ldots \cup x_{n_k}\} \wedge \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = \{1, 2, \ldots, k\}]$$

(2) Il est tout naturel de définir dans $\overline{\cap}\,(E, \mathscr{F})$ la relation binaire suivante:

$$\forall \mathring{\alpha}, \mathring{\beta} \,\varepsilon\, \overline{\cap}\,(E, \mathscr{F}) : (\mathring{\alpha} \mathrel{\mathsf{X}} \mathring{\beta}) \Longleftrightarrow (\mathring{\alpha} \subset \mathring{\beta})$$

dont l'interprétation intuitive est évidente:

«$\mathring{\alpha} \mathrel{\mathsf{X}} \mathring{\beta}$» s'exprime par «$\mathring{\alpha}$ est surtroué à $\mathring{\beta}$»

ou «$\mathring{\beta}$ est soustroué à $\mathring{\alpha}$» et se note encore

$$\mathring{\beta} \mathrel{\mathsf{X}} \mathring{\alpha}.$$

Il est alors immédiat — et la vérification en est laissée à l'étudiant — que X est une *relation d'ordre* dans $\overline{\cap}\,(E, \mathscr{F})$.

(3)* On obtient alors le théorème:

Le couple $(\overline{\cap}\,(E, \mathscr{F}), \mathsf{X})$ est une structure isomorphe au simplexe S_A construit sur un certain ensemble $A \subsetneq \mathbb{R}$.

(4) On peut encore définir dans $\overline{\cap}\,(E,\mathscr{F})$ une autre relation binaire $\uparrow\downarrow$ qui fait ressortir des connections plus intimes entre les espaces troués éléments:

$$\forall \mathring{\alpha}, \mathring{\beta}\ \varepsilon\ \overline{\cap}\,(E,\mathscr{F}) : [\mathring{\alpha} \uparrow\downarrow \mathring{\beta}] \Longleftrightarrow$$

$$[\exists\, i, j\ \varepsilon\ \mathbb{N} : \mathring{\alpha} = \mathscr{F} \setminus (x_{n_1} \cup x_{n_2} \cup \ldots \cup x_{n_i}) \wedge \mathring{\beta} = \mathscr{F} \setminus (x_{m_1} \cup x_{m_2} \cup \ldots \cup x_{m_j} \wedge (i = j)]$$

L'étudiant vérifiera aisément que $\uparrow\downarrow$ et sa réciproque $\downarrow\uparrow$ sont des *relations d'équivalence* dans $\overline{\cap}\,(E,\mathscr{F})$.

(5) Il en découle l'existence d'une partition triviale de $\overline{\cap}\,(E,\mathscr{F})$, dont les classes comprennent les espaces «équitroués» de $\overline{\cap}\,(E,\mathscr{F})$. Ces classes sont d'ailleurs bien mises en évidence dans le treillis correspondant à la relation

$$\between \subset \overline{\cap}\,(E,\mathscr{F}) \times \overline{\cap}\,(E,\mathscr{F}).$$

(6) L'auteur a réussi à montrer, en 1942, que le sextuplet $[\overline{\cap}\,(E,\mathscr{F}), \cup, \cap, ', \varnothing, \mathscr{F}]$ constitue une algèbre booléenne.

Extension des notions précédentes

(1) On note π_E l'ensemble de toutes les partitions finies possibles de E, puis on définit l'ensemble $\Theta(E)$ de tous les espaces troués dérivés de E, engendrés par un élément $\mathscr{F}\ \varepsilon\ \pi_E$ arbitraire.

(2)* Par analogie avec $\between$, on définit une relation binaire dans $\Theta(E)$:

$$\prec = \{ (\Delta, \Gamma)\ \varepsilon\ \Theta(E) \times \Theta(E) : \Delta \subset \Gamma \}$$

Pour chaque $\mathscr{F}\ \varepsilon\ \pi_E$, on peut définir une relation $(\between)_{\mathscr{F}}$. Alors $(\between)_{\mathscr{F}}$ apparaît comme la restriction à $\overline{\cap}\,(E,\mathscr{F})$ de $\prec$.

(3)* Un sujet d'étude intéressant consiste à chercher une généralisation du théorème déjà énoncé, à propos du couple $(\Theta(E), \prec)$ [3].

(4)* On peut prouver encore [4], quoique la démonstration en soit assez délicate, l'existence d'une partition de $\Theta(E)$, à laquelle corresponde une relation d'équivalence notée $\natural$ définie par

$$\forall \Delta, \Gamma\ \varepsilon\ \Theta(E) : (\Delta \natural \Gamma) \Longleftrightarrow (\# \Delta = \# \Gamma)$$

et telle que pour tout $\mathscr{F}\ \varepsilon\ \pi_E$, $(\uparrow\downarrow)_{\mathscr{F}} \subset \natural$.

(5)* Soit $\mathscr{B}$ une famille donnée d'ensembles. L'étude de la structure de l'ensemble $\{ \Theta(E) : E\ \varepsilon\ \mathscr{B} \}$, muni d'opérations convenablement choisies, a fait l'objet de peu de recherches jusqu'à ce jour [5].

Cas où l'ensemble E est un espace métrique

(1) Soit E un ensemble donné et soit $\mathscr{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ une partition finie donnée de E. Supposons maintenant que l'on a défini dans E une «distance»

$$\delta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ : (x, y) \longmapsto \delta\,(x, y)$$

satisfaisant aux conditions

(1) $\delta\,(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(2) $\delta\,(x, y) = \delta\,(y, x)$;

(3) $\delta(x, y) + \delta(y, z) \leqslant \delta(x, z)$,
pour des éléments x, y et z quelconques de E.

(2) On démontre sans trop de difficulté le théorème:
Pour tout élément $\mathring{\alpha}$ de $\bar{\cap}(E, \mathcal{F})$, la relation $\delta \cap (\cup \mathring{\alpha} \times \cup \mathring{\alpha})$ est à nouveau une «distance», soit une «sous-distance» de δ.

(3)* L'étude de l'ensemble de toutes les «sous-distances» de δ présente un problème encore peu exploré.

Variétés de gruyère

Lorsque E est muni d'une distance δ, on peut définir une catégorie d'espaces troués, nommés «variétés de gruyère», à cause de la représentation intuitive qu'on s'en fait généralement.

Une *variété de gruyère* est un espace troué dont le «diamètre» des «trous» est borné supérieurement. On sait que le diamètre d'un trou x_u est la borne supérieure de l'ensemble

$$\{\delta(x, y) \mid x \,\varepsilon\, x_u \wedge y \,\varepsilon\, x_u\}$$

Un plan π et une partition de π obtenue à l'aide de n droites d'une direction donnée ($n \,\varepsilon\, \mathbb{N}$), par exemple, permettant de dériver des espaces troués qui en général ne sont pas des variétés de Gruyère.

Les variétés de Gruyère constituent les espaces troués dont la topologie naturelle permet le plus facilement des généralisations et dont l'étude globale demeure la plus simple.

Relations de pseudoéquivalence

On conserve les notations précédentes dans le cas d'un espace troué $\mathring{\alpha} \,\varepsilon\, \bar{\cap}(E, \mathcal{F})$ de la catégorie des variétés de Gruyère. On munit alors $\mathcal{F}$ d'une relation d'ordre notée $\prec$.

Pour chaque espace troué $\mathring{\alpha}$ dérivé de E et engendré par $\mathcal{F}$, $\prec$ induit dans $\mathcal{F} \setminus \mathring{\alpha}$ un ordre $\mathring{\prec}$ (qui correspond intuitivement à un ordre entre les «trous» dans $\mathcal{F}$):

$$x_{k_1} \mathring{\prec} x_{k_2} \mathring{\prec} \ldots \mathring{\prec} x_{k_u}$$

où $\{k_1, k_2, \ldots, k_u\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$.

Il est maintenant possible de définir la relation $)\circ($ («... est presque dans le même trou que...») dans l'ensemble $\cup(\mathcal{F} \setminus \mathring{\alpha})$. Un nombre $b \,\varepsilon\, \{1, 2, \ldots, m\}$ étant donné, on pose, pour des éléments quelconques x_{k_i} et x_{k_j} de $\mathcal{F} \setminus \mathring{\alpha}$:

$$\forall x \,\varepsilon\, x_{k_i} \; \forall y \,\varepsilon\, x_{k_j} : [x \,)\circ(\, y] \Longleftrightarrow [\,|i - j| < b].$$

On vérifie qu'il s'agit soit d'une *équivalence*, soit d'une *pseudoéquivalence* (relation réflexive, symétrique et non transitive) analogue à la relation «... ressemble à ...» entre des humains.

Un problème encore non entièrement résolu consiste à rechercher la condition nécessaire et suffisante pour que $)\circ($ soit une relation pseudoéquivalente dans $\cup(\mathcal{F} \setminus \mathring{\alpha})$ [6].

Quelques exercices laissés à l'étudiant

1. Est-ce que $\varnothing$ et $\mathcal{F}$ sont des éléments de $\bar{\cap}(E, \mathcal{F})$?
2. Montrer que la relation $\dot{\times}$ dans $\bar{\cap}(E, \mathcal{F})$ est un ordre. Est-il strict? Est-il total?
3. Montrer que la relation $\upharpoonleft\!\downharpoonright$ est une équivalence dans $\bar{\cap}(E, \mathcal{F})$.

Voir notes en page 61.