LE DÉVELOPPEMENT DE LA PERCEPTION SPATIALE

Janos Baracs, Université de Montréal
Richard Pallascio, Cegep Édouard-Montpetit

La perception spatiale est un atout pour la vie. Tout comme la lecture et l'écriture, elle doit être reconnue comme étant essentielle au développement et à la croissance de l'homme. Vivant dans un espace tridimensionnel, nous devons inévitablement **intervenir** dans notre environnement spatial, que ce soit pour changer notre position, ou à un niveau plus élaboré, pour concevoir l'art, l'architecture et le génie architectural pour l'usage d'autrui au sein de notre société. Pour n'importe quel type d'intervention de la sorte, l'habileté à percevoir les formes spatiales est d'égale importance, tant de la part du concepteur que des utilisateurs.

Qu'est-ce que la perception spatiale? Nous pouvons clarifier cela par analogie avec le processus de lecture du mot imprimé. Admettons que l'on vous donne un livre écrit en langue étrangère et que l'on vous en explique les symboles (lettres), la manière dont ils sont rassemblés dans des mots, la grammaire et les règles de prononciation. Vous seriez en mesure de lire le livre, même à haute voix. Mais les sons que vous émettriez pourraient vous être toujours incompréhensibles. Le **message** ne serait peut-être pas encore passé. Telle est l'expérience de la plupart des gens confrontés avec les dessins ou leur environnement tridimensionnel. Le **message** demeure dénaturé. Il n'y a pas d'image spatiale que l'on puisse manipuler, il n'y a pas de mémoire spatiale, il n'y a pas de pouvoir qui nous permette de prévoir les conséquences d'un changement de relations spatiales entre les objets, il n'y a pas de sentiment **d'orientation** par rapport à l'environnement.

Il est évident qu'il existe des niveaux d'utilisation des matériaux écrits, disons du Montréal-Matin à Molière. De la même manière, il y a des niveaux de perception spatiale, certains nécessaires à la vie de tous les jours, d'autres, requis à différents degrés de spécialisation humaine. Ainsi, un modeste degré de perception spatiale est requis pour se familiariser avec notre espace vital et le réorganiser. Un haut degré de perception spatiale et d'intuition géométrique est requis en cristallographie, en biochimie, en chirurgie, pour l'aviation, l'opération de pelles mécaniques, la sculpture, la chorégraphie et l'architecture. Et si le grand public doit utiliser, comprendre et apprécier les créations dans ces champs spécifiques d'efforts soutenus, ils doivent à leur tour avoir une meilleure conscience des formes spatiales.

Une bonne formation de la perception spatiale peut permettre une condition humaine mieux adaptée à notre monde. Un entraînement de la perception spatiale commencé tôt peut créer des individus ayant moins de chances d'être lésés dans la réalisation de leurs tâches quotidiennes. En effet, un certain entraînement de la perception spatiale devrait être offert à n'importe quel âge et à tout niveau approprié de spécialisation professionnelle.

Des membres du Groupe de Recherche en Topologie Structurale, groupe interinstitutionnel et interdisciplinaire, ont remarqué, certains d'entre eux à travers une expérience de 15-20 ans d'enseignement de la perception spatiale, de la géométrie, d'autres par des recherches mathématiques ou une pratique professionnelle (architectes, ingénieurs et dessinateurs industriels), que la perception spatiale est normalement peu développée, rarement enseignée, et quasiment jamais expérimentée.

Une prochaine recherche étudiera les aptitudes menant au développement de la perception spatiale. Elle précisera les **obstacles**, qu'ils soient physiologiques, psychologiques, physiques ou pédagogiques, qui s'opposent au développement de la perception spatiale. (Certains obstacles sont inévitables, tels la gravité, les lignes cachées dues à l'opacité des objets solides; d'autres sont évitables, comme certaines orientations de l'enseignement d'aujourd'hui.)

Le projet visera à développer des ensembles éducatifs à différents niveaux, une série bien structurée d'exercices pour développer la perception spatiale, et une variété de tests qui détecteront et distingueront une panoplie d'aptitudes et d'habiletés à travers une série de besoins et d'aptitudes spécialisées. [1]

L'environnement mathématique

D'où vient le préjugé que la mathématique, étant une science abstraite, son apprentissage peut se passer de matériel concret? Au contraire! Même les mathématiciens professionnels avouent devoir très souvent s'appuyer sur des supports concrets afin de mieux saisir certains concepts. [4]

À juste titre, le mathématicien français Jean Dieudonné, dans une conférence à Luxembourg en 1974 portant sur **L'abstraction et l'intuition géométrique**, rapportait le fait *qu'au 19e siècle, dans le calcul à n variables, on s'est peu à peu rendu compte qu'il y a intérêt à utiliser non pas un langage algébrique, mais un* **langage géométrique**. *Au lieu de parler d'une* *équation $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, on parle de l'hyperplan ayant cette équation. On n'a strictement rien ajouté du point de vue mathématique, mais on a introduit une notion qui rappelle une notion connue dans le cas $n = 2$ ou 3, où nous disposons de l'intuition géométrique* [3]. C'est-à-dire celle qui s'appuie sur une réalité sensible ou tangible.

En partant de cette idée, des membres du Groupe de Recherche en Topologie Structurale ont développé du matériel didactique, expérimenté dans diverses écoles. Après avoir précisé la démarche didactique entourant notre intervention, nous présenterons un exemple vécu dans une école primaire.

L'enfant doit pouvoir faire sa propre démarche, sa propre période d'exploration physique, affective et intellectuelle. On doit lui laisser le temps d'apprivoiser ce matériel, de le manipuler, de satisfaire sa curiosité naturelle, d'explorer les diverses possibilités, de poser ses propres questions et problèmes.

Loin d'être une perte de temps, une telle période lui permet d'emmagasiner des souvenirs (images, relations, actions, ...) et d'explorer une quantité d'avenues qui faciliteront grandement une étude plus structurée qui pourra lui être proposée ultérieurement. Lors de cette étude, on pourra mieux l'aider à structurer ses connaissances, à aller plus loin.

D'un autre côté, cette approche favorise aussi l'acquisition d'excellentes habitudes mathématiques chez l'enfant. Elle l'amène à avoir confiance en lui, à prendre des initiatives, à explorer une même situation sous divers angles, à repartir à la *pêche aux idées* lorsqu'une démarche n'aboutit pas.

De ce point de vue, il est évident que les possibilités éducatives varient d'un matériel à l'autre. Cependant, il nous est possible d'esquisser les principales étapes qui nous guident lorsque nous utilisons un matériel avec les enfants. Ces étapes ont plus ou moins d'emphase, dépendamment du matériel choisi:

1. EXPLORATION:
Par des activités de manipulation, des essais, des discussions, l'enfant accumule des souvenirs. Il peut déjà découvrir, expérimentalement, certains résultats.

2. PRISE DE CONSCIENCE:
L'enfant est amené à réfléchir sur ses actions, sur les résultats qu'il a obtenus, sur d'autres possibilités. En ses propres mots, il exprime sa démarche et interprète ses résultats.

3. MATHÉMATISATION:
L'enfant est amené à se demander si ses méthodes et ses résultats sont généralisables, si le langage et les méthodes mathématiques ne lui permettraient pas de les décrire avec plus d'exactitude et de cohérence.

Naturellement, un tel schéma pourrait être raffiné davantage. Mais il nous suffit pour illustrer notre souci d'exploiter une dynamique d'interaction centrée sur l'enfant, pour nous assurer de greffer les activités qu'on lui propose vers son vécu. Sans compter qu'une telle stratégie nous a maintes fois permis de découvrir des utilisations insoupçonnées d'un matériel donné. Ce schéma permet aussi à l'enfant de mieux se protéger contre les interférences externes, interférences guidées par de bonnes intentions, mais qui présupposent que l'enfant doit avoir les mêmes préoccupations mathématiques que l'adulte, qu'il doit raisonner comme lui, qu'il doit ressentir les mêmes besoins de certitude.[4]

Phase		**Moyen**
Exploration	⟷	Expérience ↔ Jeu
↓		↓
Prise de conscience	⟷	Réflexion ↔ Expression
↓		↓
Mathématisation	⟷	Généralisation ↔ Langage

Figure 1. Démarche didactique

Or certaines recherches en didactique de la mathématique ont effectivement mis en lumière les divers degrés de certitude ressentie d'un enfant à l'autre, entre autres, les travaux de Nicolas Balacheff de Grenoble portant sur l'**Analyse, dans le cas de problèmes combinatoires, de l'élaboration d'explications par les élèves de 6ième**, présentés l'an dernier à Paris[1].

Un exemple

Voici, pour illustrer la démarche didactique, un exemple vécu par une petite fille de 9 ans, qui s'intitule *Les seuls 5 dés au monde*. Dans le laboratoire de mathématique se trouvait un petit sachet qui contenait les 5 solides de Platon, c'est-à-dire les 5 polyèdres réguliers. Ce fut suffisant pour éveiller l'intérêt de l'enfant, surtout lorsqu'à sa question *Y a-t-il d'autres dés?*, nous lui avons répondu *Non et c'est même possible de le démontrer!*

Des sentiments d'incrédulité et d'étonnement ont suivi, principalement en s'apercevant qu'il n'y avait pas de polyèdre régulier à 10 faces, 10 étant pour l'enfant qui vient d'apprendre à compter dans la base décimale, un nombre quasi mythique.

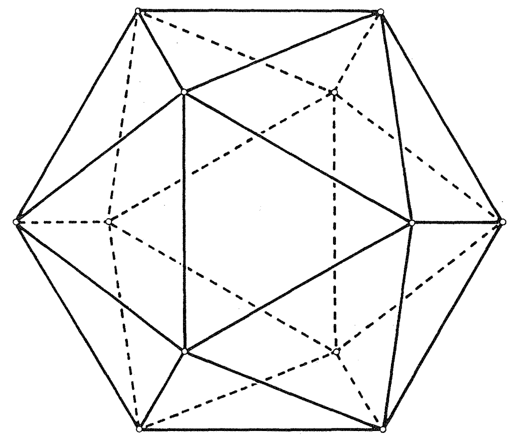
Au moyen du poly-kit, produit par le Groupe de Recherche en Topologie Structurale, l'enfant a été invitée à construire elle-même, à l'aide de ce matériau, les 5 polyèdres réguliers. Cette activité d'exploration est d'autant facilitée par le fait que l'enfant peut se corriger lui-même, ses erreurs de construction faisant apparaître des surfaces *gauches*, grâce au carton flexible.

Phase	**Moyen**
Exploration	. 5 solides de Platon . Questions, doutes, étonnement . 12 feuilles d'un poly-kit: construction des 5 *dés* (polyèdres réguliers)
Prise de conscience	. Pourquoi il n'y en a que 5? (enfant) . Peut-on le démontrer? (enfant) . Qu'est-ce qu'un *dé*? (adulte) . Étude du cas des deltaèdres (suggestion de l'adulte)
Mathématisation	. Formation d'un *sommet* . Définition d'un *dé* . Étude des polyèdres réguliers à faces carrées, pentagonales, hexagonales, ...

Figure 2. Les seuls 5 dés au monde

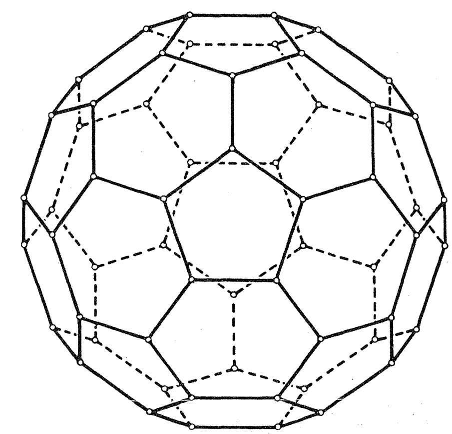
La 2[e] phase va laisser entrevoir des questions qui témoignent de l'efficacité de la 1[ère] phase, à savoir le temps pris pour explorer une idée, est loin d'être du temps perdu: *pourquoi il n'y a que 5 dés?, peut-on le démontrer?, qu'est-ce qu'un dé (sous-entendu par rapport aux autres polyèdres convexes)?*. Petit à petit, les caractéristiques du dé sont ressorties: faces *pareilles* (sous-entendu de même forme, en les comparant à des semi- réguliers (voir la figure 3)), polygones réguliers comme faces (c'est-à-dire congruence des longueurs

POLYÈDRE RÉGULIER



Icosaèdre (3-3-3-3-3)

versus POLYÈDRE SEMI-RÉGULIER



Icosaèdre tronqué (5-6-6)
(ballon de soccer)

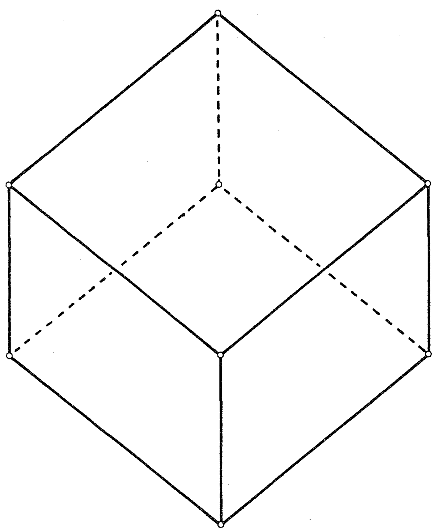
Figure 3. 1[ère] caractéristique: *faces pareilles*

Le comité de lecture attend ton article

Date de tombée: 15 janvier 1982

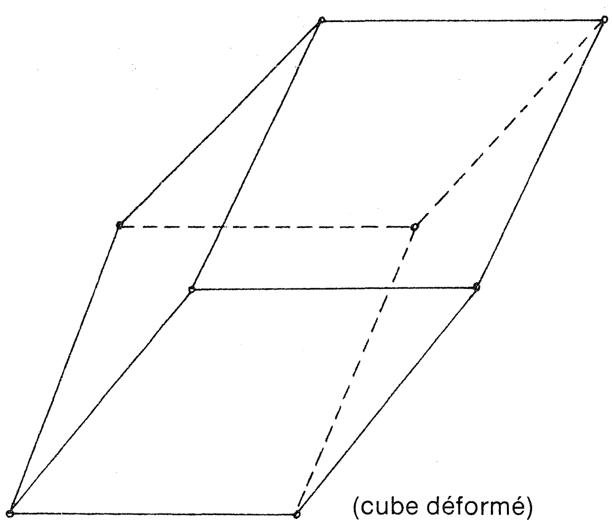
des arêtes et des angles, en les comparant, par exemple, au RHOMBOÈDRE, hexaèdre dont les six faces sont des losanges isométriques, obtenu en déformant un cube par une pression appliquée à deux sommets opposés (voir la figure 4)) et congruence sommitale du nombre de polygones adjacents (en comparant par exemple l'icosaèdre à ses deux *calottes* placées l'une sur l'autre et baptisées par l'enfant *OVNI* (voir la figure 5).

POLYÈDRE RÉGULIER



cube (4-4-4)

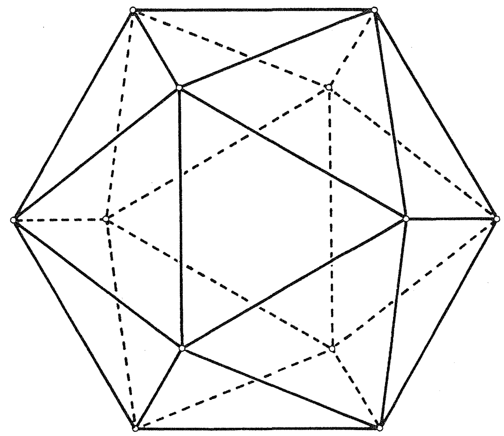
versus RHOMBOÈDRE



(cube déformé)

Figure 4. 2ième caractéristique: *polygone régulier*

POLYÈDRE RÉGULIER



Icosaèdre (3-3-3-3-3)

versus DELTAÈDRE À 10 FACES

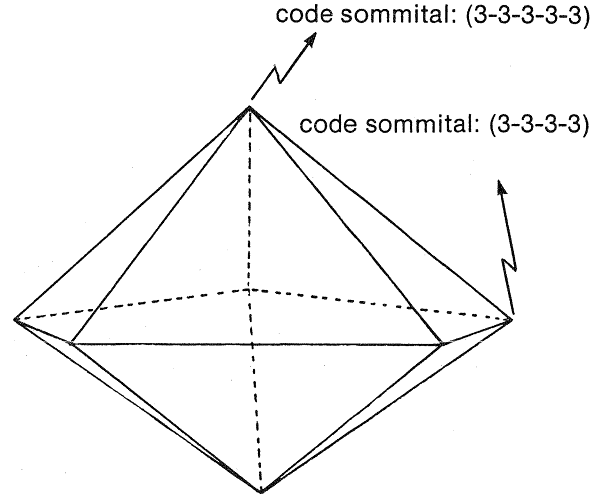


Figure 5. 3ième caractéristique: *congruence sommitale*

Ces caractéristiques ont servi par la suite dans l'étude systématique des polyèdres réguliers possibles. Mais en premier lieu, il fallait déterminer la condition minimale de l'existence d'une forme polyédrique, ou si vous voulez, le nombre minimum de faces nécessaires pour construire un angle solide. Il nous semble que ce résultat n'est pas évident pour tout non-géomètre, encore moins pour un enfant de 9 ans.

Suite à ce travail, le dénombrement des faces et des sommets des solides platoniciens et archimédiens a amené quelques enfants à reconnaître certaines *inversions*, c'est-à-dire les dualités, particulièrement triviales dans les polyèdres réguliers:

Tableau 1

Les polyèdres de Platon et leurs duals [2]

Polyèdres réguliers	F	A	S	
Tétraèdre	4	6	4	Tétraèdre
Cube	6	12	8	Octaèdre
Octaèdre	8	12	6	Cube
Dodécaèdre	12	30	20	Icosaèdre
Icosaèdre	20	30	12	Dodécaèdre
	S	A	F	Duals

(Voir figure 6 plus loin dans le texte).

À l'aide de pailles, des enfants se sont mis à construire des polyèdres ajourés afin de pouvoir illustrer les duals des polyèdres réguliers construits en carton. Ils ont même illustré la symétrie de la relation *dualité* en imbriquant plusieurs polyèdres ajourés les uns dans les autres, à savoir:

- un cube inclus dans un octaèdre, lui-même inclus dans un cube;
- un icosaèdre inclus dans un dodécaèdre, lui-même inclus dans un icosaèdre.

(Voir figure 7 plus loin dans le texte).

Finalement, la mathématisation de la situation d'apprentissage aura apporté les éléments suivants:

- le dual d'un dé est un dé;
- le dual d'un polyèdre semi-régulier n'est pas un polyèdre semi-régulier;
- le dual du dual d'un dé est ce même dé.

(Voir figure 8 plus loin dans le texte).

Des exemples d'activités mathématiques intéressantes comme celle sur les polyèdres, permettant le développement de la perception spatiale géométrique, nous commençons à en avoir une jolie brochette.

En géométrie tridimensionnelle:

- recherche des polyèdres qui permettent de construire l'espace sans laisser de *trous*, à l'aide de poly-kits;

- recherche d'images d'objets obtenues par divers déplacements: symétries orthogonales par rapport à un plan (miroir!), à un axe; translations, etc.;

- recherche de moyens d'expression de structures polyédriques (le monde dans lequel l'enfant vit et qui devrait être le premier exploré!) à l'aide de graphes, de matrices d'incidence, bref d'outils topologiques.

En géométrie plane:

- recherche d'algorithmes permettant de construire des polygones réguliers, convexes ou étoilés (élaboration d'un modèle utilisant le concept de nombres premiers entre eux);

- recherche d'un algorithme permettant de *fermer* une figure géométrique polygonale, que ce soit un simple carré ou le schéma d'un vaisseau spatial;

- simulation sur ordinateur d'une horloge et interaction des concepts de distance, de temps et de vitesse circulaire (combien de personnes, questionnées à brûle-pourpoint, n'affirmeront pas que l'aiguille des minutes va 60 fois plus vite que celle des heures?);

- somme des angles d'un triangle (sujet devenu banal, mais très riche, à condition de ne pas le voir comme un théorème de plus à apprendre par coeur). [5]

Conclusion

Le privilège de bien voir dans l'espace ne devrait pas demeurer l'apanage d'une poignée d'architectes et de spécialistes. La perception spatiale devrait être une aptitude commune, bien enseignée à chaque niveau scolaire. Mieux encore, si notre société veut vivre dans un meilleur environnement, ses membres doivent arriver à une parfaite compréhension de ce qui les entoure et des usages potentiels qui existent dans cette merveilleuse ressource naturelle qu'est notre espace tridimensionnel. [1]

Bibliographie

[1] BARACS, Janos, *La perception spatiale*, présentation d'un projet de recherche, FCAC, septembre 1980.

[2] BARACS, Janos, *Poly-kit*, Ed. Groupe de Recherche en Topologie Structurale, Université de Montréal, 1979, 48 pages.

[3] DIEUDONNÉ, Jean, *L'abstraction et l'intuition mathématique*, in. NICO, Belgique, juin 1976, 22 pages.

[4] LAQUERRE, J., MICHAUD, N., PALLASCIO, R. et TAURISSON, A., *L'apprentissage de la mathématique dans un contexte optionnel*, Rapport d'étape, 1980, 43 pages.

[5] PALLASCIO, Richard, *La mathématique: jeu d'enfant ou travail d'adulte*, Instantanés Mathématiques, 1981 (à paraître).

[6] PALLASCIO, Richard, *La perception spatiale géométrique*, Actes de la 33e rencontre internationale de la CIEAEM, Italie, août 1981 (à paraître).

[7] ROZOY-SÉNÉCHAL, Brigitte, *Géométrie classique et mathématiques modernes*, Ed. Hermann, 1980.

[1] Séminaire de didactique des mathématiques, 16 mars 1980, École Normale Supérieure.

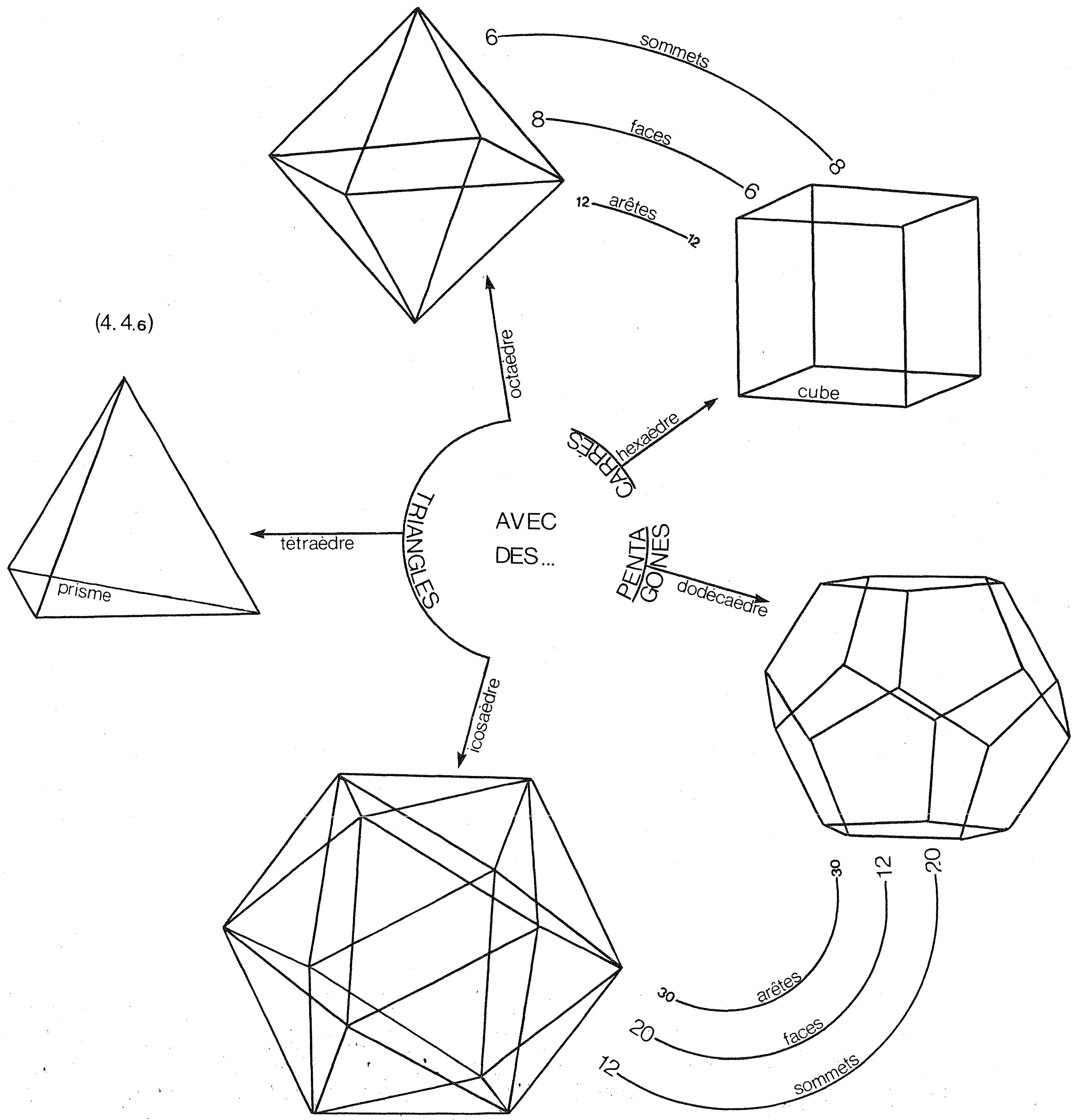


Figure 6. Solides de Platon [7]

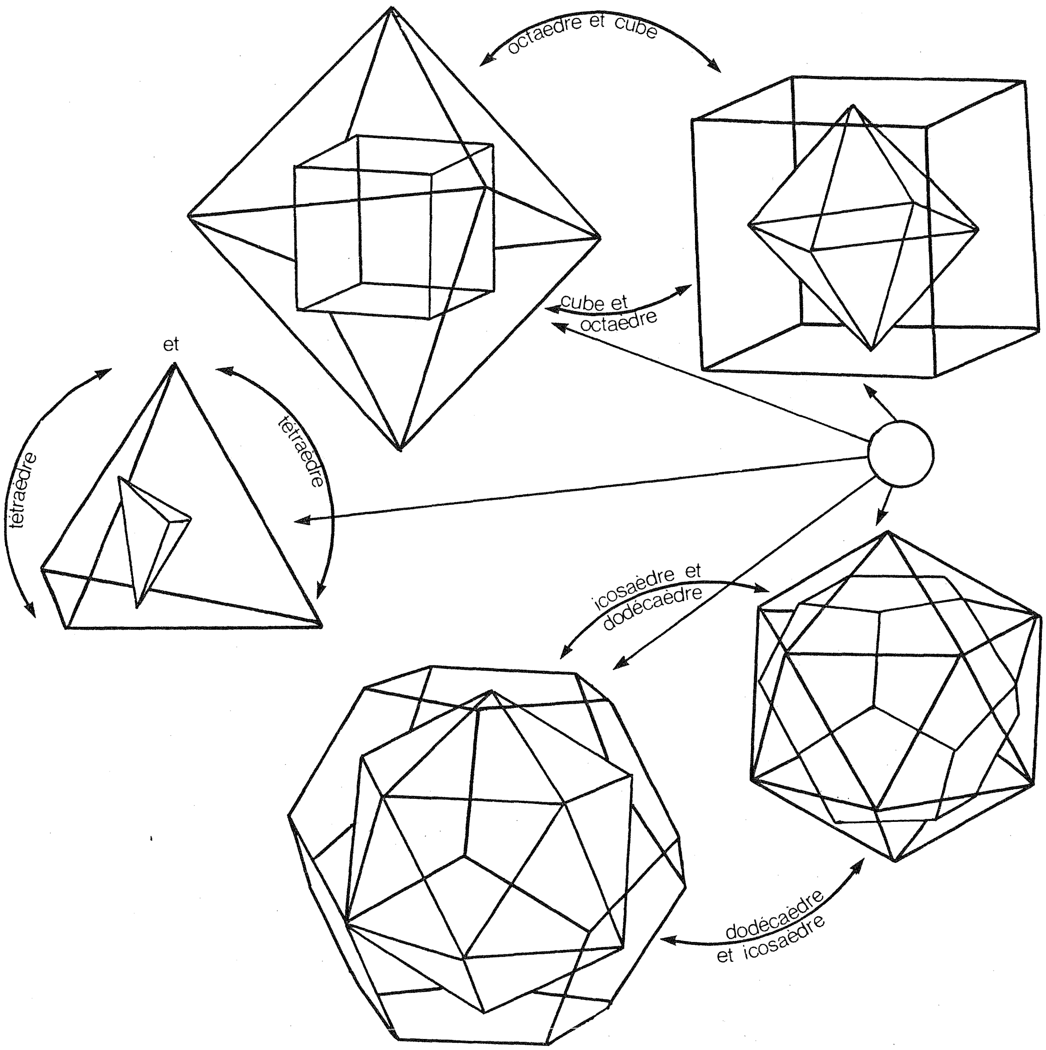


Figure 7. Dualités [7]

Exploration	. Dénombrement des faces, arêtes et sommets des dés.
↓	. Nouvelles questions.
Prise de conscience	. Dualités.
	. Polyèdres semi-réguliers.
↓	. Construction de polyèdres ajourés.
Mathématisation	. Le dual d'un *dé* est un *dé*.
	. Le dual d'un polyèdre semi-régulier n'est pas un polyèdre semi-régulier.
	. Le dual du dual d'un dé est ce même dé.

Figure 8. Dualités