CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC 1981 (SECONDAIRE)

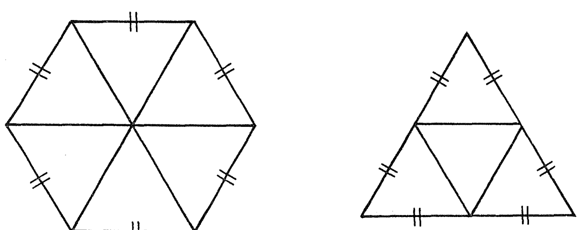
Le concours mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour que ces grands talents puissent se détacher nettement de la masse des autres, le questionnaire est abondant et varié: plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Si vous en trouvez six, vous êtes excellent en mathématiques. Seuls quelques génies en donneront sept. Bonne chance!

1. PROBLÈME DES DEUX POLYGONES RÉGULIERS

Trouver deux polygones réguliers P et Q ayant même périmètre et satisfaisant la propriété supplémentaire que le double de l'aire de P soit égal au triple de l'aire de Q.

SOLUTION

P est un hexagone régulier et Q est un triangle équilatéral. En effet:



Si —ǂǂ— représente l'unité, alors
périmètre de P = périmètre de Q = 6
$\frac{\text{aire de P}}{\text{aire de Q}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

2. LE MYSTÈRE DU CHIFFRE 9

Prenons le nombre entier 3646 et intervertissons l'ordre de ses chiffres. On obtient le nombre 6463. La différence entre ces deux nombres est 2817 qui est un nombre divisible par 9.

Jusqu'ici, rien de surprenant... mais savez-vous que si on avait pris au départ **n'importe quel** autre nombre de 4 chiffres et qu'on lui avait fait les mêmes opérations, la différence obtenue aurait encore été un nombre divisible par 9.

Prouvez ce résultat.

SOLUTION

Soit abcd ce nombre écrit en base 10. On a:

$$\begin{aligned} abcd &= 1000a + 100b + 10c + d \\ dcba &= 1000d + 100c + 10b + a. \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} |abcd - dcba| &= |999a + 90b - 90c - 999d| \\ &= 9|111a + 10b - 10c - 111d| \\ &= \text{multiple de } 9. \end{aligned}$$

3. LE DÎNER EN FAMILLES

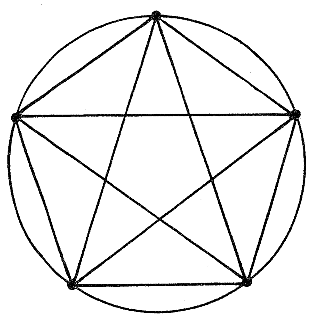
Lors d'un dîner, les membres de deux familles dont l'une est plus nombreuse que l'autre sont assis dans un ordre quelconque et de façon régulière autour d'une table ronde. Sachant qu'au total il y a un nombre pair de personnes, montrez, par un raisonnement, qu'il est certain qu'au moins deux des membres d'une même famille sont assis face à face.

SOLUTION

Supposons le contraire, c'est-à-dire que toutes les fois que deux personnes sont face à face elles appartiennent à deux familles différentes. L'ensemble des 2n personnes se présente alors comme une réunion de n paires du type {a,b} où a et b sont de familles différentes. Comme ces paires sont disjointes et que chacune contient un membre de chaque famille, on déduit qu'il y a exactement n membres dans chaque famille. Ceci est contraire à l'hypothèse qui dit qu'une famille est plus nombreuse que l'autre.

4. L'ÉTOILE

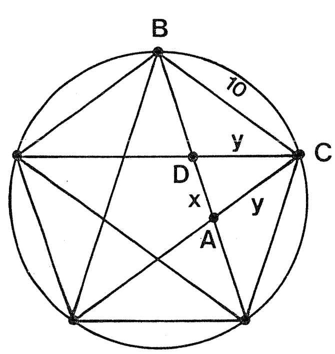
Considérons la figure régulière suivante.



Sachant que le côté du gros pentagone mesure 10 centimètres, déterminez la longueur du côté du petit pentagone.

SOLUTION

On vérifie facilement par les propriétés des angles inscrits que les triangles ABC et ACD sont isocèles et semblables.



Posons $x = AD$ et $y = BD = CD = AC$.

Comme $AB = BC$, on a

$$x + y = 10. \qquad (1)$$

Comme $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}$ on a:

$$\frac{y}{x} = \frac{10}{y}$$

d'où $10x = y^2$, c'est-à-dire

$$x = y^2/10. \qquad (2)$$

Substituant (2) dans (1), on en déduit que:

$$\frac{y^2}{10} + y = 10, \quad \text{c.-à-d.} \quad y^2 + 10y - 100 = 0.$$

Résolvant, on arrive à $y = 5(\sqrt{5} - 1)$. Utilisant (2), on trouve finalement $x = 5(3 - \sqrt{5})$.

5. LE PROBLÈME DES NOMBRES SANS ZÉRO

Convenons de dire qu'un nombre entier positif est sans zéro si son écriture usuelle (base 10) ne contient pas le chiffre 0. Combien y a-t-il de nombres entiers positifs sans zéro qui sont inférieurs à un million?

SOLUTION

Remarquons d'abord que le nombre de nombres sans zéro qui contiennent k chiffres (où $k \geqslant 1$ est donné) est 9^k.

En effet, on a 9 possibilités pour le premier chiffre puisqu'il est pris parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On a 9 possibilités pour le deuxième chiffre et ainsi de suite. On a donc un total de

$$\underbrace{9 \times 9 \times \ldots \times 9}_{k \text{ fois}} = 9^k$$

possibilités.

Comme un nombre sans zéro inférieur à 1 000 000 possède soit 1 chiffre, soit 2 chiffres, soit 3 chiffres, soit 4 chiffres, soit 5 chiffres ou soit 6 chiffres, on a un grand total de

$$9^1 \times 9^2 \times 9^3 \times 9^4 \times 9^5 \times 9^6 = 531\,441$$

possibilités.

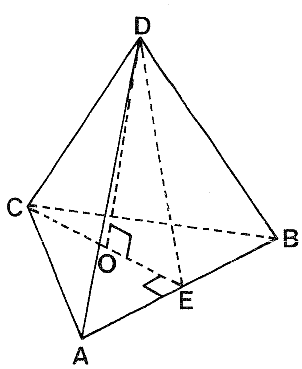
6. LE BIJOU TÉTRAÉDRIQUE

Un millionnaire excentrique s'est fait construire un **bijou** très spécial. Il s'agit d'un tétraèdre régulier (plein) en or massif dont le poids total est de 10 kilogrammes! En estimant la densité de l'or à 19,5, déterminez la hauteur du **bijou** du millionnaire. (Il n'est pas nécessaire d'évaluer les racines carrées ou cubiques rencontrées).

Rappel: Un tétraèdre est une pyramide dont toutes les faces (y compris la base) sont des triangles équilatéraux.

SOLUTION

Désignons par ABCD le tétraèdre régulier dont la base est le triangle équilatéral ABC. Abaissons la hauteur DO. Le point O est situé au centre du triangle ABC. Soit CE la hauteur du triangle ABC issue de C.



Comme le point O est le point de rencontre de médianes du triangle ABC, on peut écrire $\overline{OE} = 1/3\ \overline{CE}$. Désignons par H la hauteur (en centimètres) du tétraèdre ABCD, par h la hauteur (en centimètres) du triangle ABC et par c la longueur (en centimètres) du côté du triangle ABC. Le triangle rectangle DOE donne $\overline{DO}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{OE}^2$, c'est-à-dire

$$H^2 = h^2 - (\tfrac{1}{3}h)^2 = \tfrac{8}{9}h^2.$$

D'où l'on tire

$$h = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,H. \qquad (1)$$

Le triangle rectangle AEC donne $\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{CE}^2$, c'est-à-dire $c^2 - (\frac{1}{2}c)^2 = h^2$.

D'où l'on tire, tenant compte de (1)

$$c = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,H. \qquad (2)$$

Le volume V du tétraèdre est donné par

$$V = \tfrac{1}{3}(\text{aire du } \triangle ABC) \cdot H = \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{1}{2}\, ch) \cdot H = \tfrac{1}{6} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot H \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}\, H \cdot H.$$

C'est-à-dire

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8}\, H^3. \qquad (3)$$

D'autre part on sait que (poids en grammes) = densité × (volume en cm³). Donc 10 000 = 19,5 V. Comparant avec (3) on obtient

$$V = \frac{10\,000}{19{,}5} = \frac{\sqrt{3}}{8} H^3,$$

donc

$$H = \sqrt[3]{\frac{80\,000}{19{,}5\sqrt{3}}} \text{ cm} \approx 13{,}33 \text{ cm}.$$

7. PORTES ET CLEFS

Soit n un entier strictement positif quelconque. Considérons un édifice possédant n portes et un ensemble de n clefs. Chaque clef peut ouvrir une et une seule porte et chaque porte peut être ouverte par une et une seule clef.

Par définition, on dira qu'on a effectué une **mauvaise disposition** des n clefs lorsqu'on a placé une clef devant chacune des n portes de façon à ce qu'aucune des clefs ne puisse ouvrir la porte devant laquelle elle est placée. Désignons par d(n) le nombre de **toutes** les mauvaises dispositions possibles des n clefs. Par exemple, il est facile de vérifier que:

$$d(1) = 0, \quad d(2) = 1, \quad d(3) = 2, \quad d(4) = 9.$$

Problème: Montrez que pour **tout entier** $n \geqslant 1$, on a:

$$d(n+1) = n(d(n-1) + d(n))$$

et déduisez-en la valeur de d(7).

SOLUTION

Considérons n+1 portes numérotées de 1 à n+1 et n+1 clefs numérotées de 1 à n + 1. Supposons que la clef #k n'ouvre que la porte #k(pour k = 1,2,...,n+1). Nous allons dénombrer les d(n+1) mauvaises dispositions des n + 1 clefs selon le numéro i de la clef placée devant la porte #(n+1). Bien sûr, i ne peut varier que de 1 à n puisque la clef #i ne peut ouvrir la porte #(n+1) dans une mauvaise disposition. Fixons i et soit j le numéro de la clef placée devant la porte #i. Bien sûr, $j \neq i$. On a deux possibilités: a) j = n+1 et b) $1 \leq j \leq n$.

Dans le cas a), on a la situation

portes	1	2	...	i	...	n	n+1
clefs	?	?	...	n+1	...	?	i

et les (n-1) clefs #1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n restantes peuvent être disposées de d(n-1) façons devant les (n-1) portes #1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n.

Dans le cas b), on a la situation,

portes	1	2	...	i	...	n	n+1
clefs	?	?	...	j	...	?	i

Interchangeant les clefs #i et #j, on se rend compte qu'il est équivalent de dénombrer les situations de la forme

portes	1	2	...	i	...	n	n+1
clefs	?	?	...	i	...	?	j

où les n clefs #1,2,...,i-1,i+1,...,n,n+1 peuvent être disposées de d(n) façons devant les n portes #1,2,...,i-1,i+1,...,n,n+1. Totalisant a) et b) on trouve d(n-1) + d(n) possibilités. Comme i peut prendre n valeurs ($1 \leq i \leq n$) on obtient bien d(n+1) = n(d(n-1)+(d(n)). Utilisant le fait que d(4) = 9 et utilisant la formule pour n = 4,5,6 on trouve d(7) = 1854. ■

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

Liste des 50 premiers gagnants
pour l'année 1981 (niveau secondaire)

BERNIER, David	Collège des Jésuites, Québec
CLOUTIER, Renaud	École secondaire St-Luc, Montréal
LANTHIER, Alain	Polyvalente Édouard Montpetit, Montréal
BENGIO, Samy	École secondaire St-Luc, Montréal
MORIN, Roch	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
CHATEL, Marc	Externat Sacré-Coeur, Rosemère
DESROCHERS, Marc	École LaDauversière, Montréal
AMAR, Laurent	École secondaire St-Luc, Montréal
LEFRANÇOIS, Renaud	Collège des Jésuites, Québec
GÉLINAS, Manon	Polyvalente Baie St-François, Valleyfield
MARTEL, Alain	Polyvalente Euclide-Théberge, Marieville
BOSSEN, Ingrid	École secondaire St-Luc, Montréal
MAJOR, Pierre	Collège des Eudistes, Montréal
BRILLON, Sylvie	Polyvalente Ste-Thérèse, Ste-Thérèse
DOYON, Raynald	École secondaire M.S.C., Beauport
PRIMEAU, Éric	Externat Sacré-Coeur, Rosemère
RAYMOND, Marc	École sec. Marcellin-Champagnat, Iberville
COLLINS, Donald-Louis	Académie Michèle Provost, Montréal
CORBEIL, Jean-Pierre	Séminaire de Joliette, Joliette
BERGERON, Mario	Polyvalente de Kénogami, Kénogami
ROYER, Christian	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
BENOÎT, Claude	École secondaire Pont-Viau, Laval
LAGARDE, Jean	Collège des Eudistes, Montréal
VALLÉE, Claude	Collège Notre-Dame, Montréal
DUTIL, Lucie	Collège Durocher, St-Lambert
LAQUOC, François	École secondaire St-Luc, Montréal
LEGAULT, Éric	Polyvalente Paul-Gérin-Lajoie, Outremont
BOIVIN, Réjean	Polyv. Antoine-de-St-Exupéry, St-Léonard
BERGERON, André	Polyvalente Lucien-Pagé, Montréal
POUDRETTE, Sylvain	Polyvalente Mont-Bruno, St-Bruno
DESILETS, Alain	Polyv. Antoine-de-St-Exupéry, St-Léonard
KIBIRKSTIS, Algis	Polyv. Des Sources, Dollard-des-Ormeaux
SAVARD, Carole	École secondaire St-Joseph, Hull
THIVIERGE, Jean	École secondaire Louis-Riel, Montréal
MAGEREN, Jean-Paul	Polyvalente Mont-Bruno, St-Bruno
DERÔME, Philippe	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
GAGNON, Gilles	Polyvalente Jacques-Rousseau, Longueuil
LONGPRÉ, Gilles	Collège de l'Assomption, l'Assomption
NGUYEN, Thuy Dung	Polyvalente Lucien-Pagé, Montréal
LÉONARD, Éric	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
LEFEBVRE, Stéphane	Polyvalente Édouard-Montpetit, Montréal
PRESCOTT, Kathleen	École secondaire Pont-Viau, Laval
TREMBLAY, Jean-Yves	Collège de l'Assomption, l'Assomption
BRASSEUR, Lucie	École secondaire Évangéline, Montréal
SICARD, Jean	École secondaire Louis-Riel, Montréal
GODRI, François	École sec. Marcellin-Champagnat, Iberville
LAVOIE, Michel	École secondaire M.S.C., Beauport
HARVEY, France	Collège Notre-Dame-de-Bellevue, Québec
BEAUDOIN, Jean	Séminaire Ste-Marie, Shawinigan
LAPLANTE, Éric	École secondaire M.S.C., Beauport

Les professeurs qui, chaque année, dans les diverses maisons d'enseignement du Québec, s'occupent des concours de l'AMQ sont fréquemment à la recherche d'exercices qui permettent à leurs étudiants de se préparer à la tenue de ce concours.

Nous portons à leur attention, CRUX MATHEMATICORUM, une petite revue canadienne, dont chaque numéro fourmille de problèmes susceptibles de les intéresser. On peut s'y abonner en s'adressant à:

F.G.B. Maskell
Collège algonquin
200, avenue Tees
Ottawa, Ontario
KIS 0C5

L'abonnement annuel est de 12$. Il est également possible de se procurer des numéros des années précédentes.

Claude Boucher
Organisateur du concours au niveau collégial