ÉVALUATION DES FONCTIONS AVEC UNE CALCULATRICE DE POCHE

par Jacques Gélinas, Ph.D.

1. INTRODUCTION

Comment évaluer ln(1,234567)? Avec un ordinateur, on peut employer la formule [Smith, 1976, p. 39], pour $0 \leq x \leq 1$,

$$\ln(1+x) = x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(a_4 + a_5x)))) \pm 0{,}00001$$

où

$$a_1 = 0{,}99949556$$
$$a_2 = -0{,}49190896$$
$$a_3 = 0{,}28947478$$
$$a_4 = -0{,}13606275$$
$$a_5 = 0{,}03215845.$$

Avec une calculatrice de poche, une telle formule est peu pratique car il faut entrer un à un les chiffres des constantes a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5, ce qui est long, fastidieux et sujet à des erreurs de distraction.

Nous voulons montrer ici comment évaluer avec précision et rapidité quelques fonctions élémentaires en utilisant une calculatrice dotée d'un registre de mémoire et des quatre opérations de base. Les méthodes proposées peuvent servir à illustrer de façon concrète les propriétés de ces fonctions, les lois des exposants et les erreurs d'arrondi commises par une calculatrice.

2. LA CALCULATRICE DE POCHE

La calculatrice que nous voulons utiliser ici n'est pas un modèle scientifique ou programmable. Nous supposons seulement qu'elle possède une mémoire, une touche pour les quatre opérations de base +, −, ÷, ×, et, peut-être, une touche pour la racine carrée.

La précision des calculs est limitée par le nombre de chiffres décimaux affichés (souvent 8). La plupart des modèles disponibles calculent en tronquant (1,29 tronqué à deux chiffres est 1,2 et non 1,3 qui est la valeur arrondie) et ne respectent pas exactement les lois de l'arithmétique comme l'associativité et la distributivité. Par exemple, pour un modèle affichant 8 décimales,

$1000 + 0{,}00009$	donne 1000,0000,
$2 \div 3$	donne ,66666666,
$(1000 + 0{,}00009) + 0{,}00009$	donne 1000,0000,
$1000 + (0{,}00009 + 0{,}00009)$	donne 1000,0001.

3. CALCUL DE RACINES ET DE PUISSANCES

a) L'inverse 1/x d'un nombre x peut se calculer en entrant 1, appuyant sur ÷, entrant x puis appuyant sur =. Il est cependant possible, sur la plupart des modèles courants, d'entrer x, d'appuyer sur ÷, puis deux fois sur = pour obtenir le même résultat.

b) Le calcul d'une puissance x^m positive peut être simplifié par l'utilisation des lois des exposants. Par exemple,

$$x^{16} = (((x^2)^2)^2)^2,$$

et il suffit d'entrer x et d'appuyer 4 fois sur les touches × =.

c) La méthode de Héron permet l'évaluation rapide d'une racine carrée $\sqrt{N}$:

I) Entrer une approximation de $\sqrt{N}$ dans X.

II) Remplacer X par $\frac{1}{2}(X + \frac{N}{X})$ jusqu'à ce que X reste inchangé.

III) $\sqrt{N}$ est affiché.

La dernière décimale peut être en erreur d'une unité. Une première approximation de $\sqrt{N}$ peut être obtenue avec une règle à calcul ou dans une table. On notera que le nombre de décimales exactes double pratiquement à chaque itération!

Exemple: $\sqrt{10} \cong 3{,}2 \cong \frac{1}{2}(3{,}2 + \frac{10}{3{,}2}) = 3{,}1625$

$$\cong \frac{1}{2}(3{,}1625 + \frac{10}{3{,}1625}) = 3{,}1622776.$$

(Valeur exacte: 3,16227766017...).

d) Calcul d'une racine cubique $\sqrt[3]{N}$ [Neil, 1980].

I) Entrer une approximation de $\sqrt[3]{N}$ dans X.

II) Remplacer X par $\sqrt{\sqrt{NX}}$ jusqu'à ce que X reste inchangé.

III) $\sqrt[3]{N}$ est affiché.

La dernière décimale peut être en erreur d'une unité. Cette méthode est basée sur les équivalences suivantes:

$$X = \sqrt[3]{N} \Longleftrightarrow X^3 = N \Longleftrightarrow X^4 = NX \Longleftrightarrow X = (NX)^{1/4}.$$

Exemple: $\sqrt[3]{10} \cong 2{,}155$ (Règle à calcul)

$$\cong (21{,}55)^{1/4} \cong (21{,}546)^{1/4} \cong (21{,}54448)^{1/4}$$
$$\cong (21{,}5445)^{1/4} \cong \ldots \cong 2{,}1544346.$$

On voit qu'il faut environ 3 itérations, donc 6 racines carrées, pour obtenir une décimale supplémentaire de précision. Si la calculatrice est dotée d'une touche pour la racine carrée, cette méthode est très simple!

4. CALCUL DE e^x.

a) On peut réduire le domaine de x à [-1/2, 1/2] en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, multipliant ou divisant au besoin par une puissance entière de e = 2,718281828:

$$e^{-2,34} = e^{-2}e^{-0,34};\ e^{0,95} = ee^{-0,05};\ e^{1,1} = ee^{0,1}.$$

b) L'algorithme suivant [Neil, 1980] utilise la relation qu'on peut établir avec la règle de l'Hôpital:

$$e^x = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m.$$

Pour faciliter le calcul des puissances, on choisit $m = 2^k$.

I) Entrer x.

II) Diviser par 2, k fois.

III) Ajouter 1.

IV) Mettre au carré k fois.

V) e^x est affiché.

Le choix optimal de k dépend de x et de la précision de la calculatrice. Si k est trop petit, la limite n'est pas approchée d'assez près. Par contre, si k est trop grand, les erreurs d'arrondi dues à la calculatrice dominent. Pour une calculatrice tronquant à 8 décimales, on peut énoncer les règles suivantes:
- pour $|x|$ entre 0 et 0,01, prendre k = 1 et arrondir à 6 décimales.
- pour $|x|$ entre 0,01 et 0,1, prendre k = 4 et arrondir à 5 décimales.
- pour $|x|$ entre 0,1 et 0,5, prendre k = 7 et arrondir à 4 décimales.

c) Pour plus de précision, nous proposons l'algorithme suivant:

I) Poser X = 100x.

II) Diviser X par 32.

III) Remplacer X par

$$Y = X\left(1 + \frac{X}{200}\left(1 + \frac{X}{300}\left(1 + \frac{X}{400}\right)\right)\right).$$

IV) Remplacer 5 fois Y par $Y(2 + \frac{Y}{100})$.

V) Diviser par 100 et ajouter 1.

VI) e^x est affiché.

Avec une calculatrice tronquant à 8 (10) décimales, on obtiendra au moins 7 (9) décimales de précision. La touche %, si disponible, peut être utilisée pour diviser par 100. Si la calculatrice utilise des exposants, il n'est pas nécessaire de multiplier et diviser par 100.

Exemple: x = 0,5; X = 50; X = 50/32 = 1,5625

$100(e^{X/32} - 1) \cong 1{,}5747070$

$e^x \cong 1{,}6487211$ (au lieu de 1,64872127...).

d) Si l'on dispose de tables, on peut écrire

$$e^x = e^{(t+r)} = e^t e^r,$$

où t est l'entrée de la table la plus près de x, et r est le reste. Pour une table à 5 chiffres, $|r| < 0{,}01$ et il est facile de calculer e^r comme ci-haut: il suffit alors de multiplier ce résultat par la valeur de e^t fournie dans la table et d'arrondir au nombre de chiffres de la table moins un. Cette méthode est plus rapide et précise que l'interpolation.

5. CALCUL DE ln(x)

a) On peut réduire le domaine de x à $[e^{-1/2}, e^{1/2}]$ en divisant ou multipliant au besoin par une puissance entière de e = 2,718281828:

$$\ln(2{,}5) = \ln(e\tfrac{2{,}5}{e}) = \ln(e) + \ln(\tfrac{2{,}5}{e}) = 1 + \ln(0{,}91969925).$$

$$\ln(0{,}5) = \ln(0{,}5e) + \ln(\tfrac{1}{e}) = \ln(1{,}3591399) - 1.$$

b) L'algorithme suivant [Neil, 1980] est obtenu en inversant les étapes de l'algorithme pour l'exponentielle et est basé sur la relation

$$\ln(x) = \lim_{m\to\infty} m(x^{1/m} - 1).$$

Noter que les approximations proposées pour e^x et ln(x) sont inverses l'une de l'autre, comme il se doit:

$$y = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \Longleftrightarrow x = m(y^{1/m} - 1).$$

I) Entrer x.

II) Prendre la racine carrée k fois.

III) Soustraire 1.

IV) Multiplier par 2, k fois.

V) ln(x) est affiché.

Avec une calculatrice tronquant à 8 décimales, on obtiendra environ 4 décimales de précision en prenant k = 8.

c) Pour obtenir plus de précision et éviter le calcul de racines carrées, nous suggérons d'employer la série suivante:

$$\ln(x) \cong 2y + \frac{2y^3}{3}\left(1 + \frac{3y^2}{5}\left(1 + \frac{5y^2}{7}\left(1 + \frac{7y^2}{9}\right)\right)\right)$$

où

$$y = (x-1)/(x+1).$$

EXEMPLE:

x = 1,6; 10y = 6/2,6 ≅ 2,3076923;

10 ln(1,6) ≅ 4,700036 (au lieu de 4,70036292...).

Noter que la touche %, si disponible, est utile ici car

$$y^2 = (10y)^2/100 = (10y)^2 \times 1\%.$$

d) Si l'on dispose de tables, on peut écrire

$$\ln(x) = \ln(t + r) = \ln(t) + \ln(1 + \tfrac{r}{t}),$$

où t est l'entrée de la table la plus près de x, et r est le reste. Pour une table à 5 chiffres, $|r| < 0{,}01$ et on peut évaluer avec précision $\ln(1 + r/t)$ comme ci-haut ou en utilisant la série de MacLaurin:

$$\ln(1 + z) \cong z(1 + z(\tfrac{z}{3} - \tfrac{1}{2})).$$

Il suffit alors d'ajouter la valeur de ln(t) fournie dans la table et d'arrondir au nombre de chiffres de la table moins un. Cette méthode est plus rapide et précise que l'interpolation.

6. CALCUL DE y^x, 10^x ET log(x)

On emploie la formule $y^x = e^{x \ln(y)}$.

Par exemple,

$$10^x = e^{x\ln(10)} = e^{x(2,30258509)}.$$

Inversement,

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x)}{2,30258509}.$$

7. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

a) Convertir l'angle en radians, si nécessaire, et le ramener à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$:

$$\sin(113,5°) = \sin(113,5\ \tfrac{\pi}{180}) = \sin(1,9809486).$$

$$\cos(2,0) = -\cos(2,0 - \pi) = -\cos(1,1415926).$$

b) Si θ est en radians, $\cos(\theta)$ peut être calculé rapidement en utilisant plusieurs fois la formule de l'angle double:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1.$$

L'algorithme suivant est une modification de celui proposé par [Neil,1980], qui suggère de remplacer $y = x/2^k$ par

$$z = 1 - \tfrac{1}{2}y^2.$$

L'expérience démontre qu'il est préférable de remplacer y par une meilleure approximation de cos(y).

I) Entrer x dans X en radians.

II) Diviser X par 2, k fois.

III) Remplacer $Y = X/2^k$ par

$$Z = 1 + Y^2(Y^2/24 - 0,5).$$

IV) Remplacer k fois Z par $2Z^2 - 1$.

V) cos(x) est affiché.

En choisissant k tel que $x/2^k < 0,01$, on obtiendra en général 5 décimales de précision pour x entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. La précision décroît hors de cet intervalle.

c) On peut calculer $\sin(\theta)$ en utilisant la relation

$$\sin(\theta) = \cos(\theta - \tfrac{\pi}{2}),$$

ou par l'algorithme suivant, qui utilise la relation

$$\sin(5\theta) = 5\sin(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 16\sin^5(\theta).$$

I) Entrer x dans X en radians.

II) Calculer $Y = X/5^k$.

III) Remplacer Y par

$$Z = Y(1 - \tfrac{Y^2}{6}(1 - \tfrac{Y^2}{20})).$$

IV) Remplacer k fois Z par

$$Z(5 + Z^2(16z^2 - 20)).$$

V) sin(x) est affiché.

En choisissant k tel que $x/5^k \leq 0,01$, on obtiendra en général 5 décimales de précision pour x entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. La précision décroît hors de cet intervalle, mais le signe reste exact.

Note: Avec un peu de pratique, cette méthode devient presque automatique. Elle peut aussi être utilisée pour calculer $\cos(\theta)$ à partir d'une approximation de $\cos(\theta/5^k)$ car

$$\cos(5\theta) = 5\cos(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 16\cos^5(\theta).$$

d) On peut calculer $tg(\theta)$ par la relation

$$tg(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

EXEMPLES

$\sin(1,5) = 0,9974949866...$; $\cos(1,5) = 0,0707372017...$;

$100\sin(1,5/125) \cong 1,199713$;

$100\sin(1,5) \cong 99,749503$.

Pour éviter la perte de chiffres significatifs avec une calculatrice sans exposant, on remarque que

$$\cos(x) = 1 + y/2 \Rightarrow \cos(2x) = 2(1+y/2)^2 - 1$$
$$= 1 + (1/2)y(4 + y).$$

$\cos(1,5/128) \cong 1 - 1,373275/20000,$

$\cos(1,5/64) \cong 1 - 5,492911/20000,$

$\cos(1,5) \cong 1 - 18585,25/20000 \cong 0,0707375.$

$$tg(1,5) \cong \frac{99,749503}{7,07375} \cong 14,101361$$

(au lieu de 14,10141995...).

8. FONCTIONS HYPERBOLIQUES

a) Il suffit de calculer une exponentielle à partir des relations

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - \frac{1}{e^x}).$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + \frac{1}{e^x}).$$

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

b) Les fonctions hyperboliques inverses se calculent simplement avec un logarithme et une racine carrée:

$$sh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$ch^{-1}(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \geq 1.$$

$$th^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1 + x}{1 - x}), \quad -1 < x < 1.$$

9. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES

a) Le calcul de Arcsin(x) et de Arctg(x) se ramène à celui de Arccos(x) en utilisant les relations

$\mathrm{Arcsin}(x) = \pi/2 - \mathrm{Arccos}(x).$

$\mathrm{Arctg}(x) = \mathrm{Arccos}(\pm 1/\sqrt{1 + x^2}).$

b) Arccos(x) peut être évalué par l'algorithme suivant, obtenu en inversant les étapes de l'algorithme pour cos(x):

I) Entrer x dans X.

II) Remplacer k fois X par $\sqrt{(1 + X)/2}$.

III) Remplacer X par $\sqrt{6 - \sqrt{12 + 24X}}$.

IV) Multiplier par 2, k fois.

V) Arccos(x) est affiché en radians.

On obtiendra environ 5 décimales de précision en choisissant $k = 4$.

EXEMPLE:

$x = \cos(y) = 0{,}1$

$\cos(y/16) \cong 0{,}99577884$

$y/16 \cong \sqrt{0{,}0084483} \cong 0{,}0919146$

$y \cong 1{,}4706336$ (au lieu de 1,470628906...).

10. BIBLIOGRAPHIE

Neil, Hugh (1980), *Calculating without a Scientific Calculator,* Mathematical Spectrum, 12, pp. 65-69.

Smith, Jon M. (1977), *Scientific Analysis on the Pocket Calculator,* 2nd ed., Wiley, N.Y.

Smith, Jon M. (1976), *Méthodes numériques pour calculateur de poche,* Eyrolles, Paris. ■

Le Comité de lecture
attend ton article
Date de tombée:
1er novembre

ELECTIONS

Règlements

Article 3.3 PROCÉDURE D'ÉLECTION

Le comité d'élection avise tous les membres de l'Association Mathématique du Québec qu'il y aura trois (3) postes à combler au Comité exécutif et dix (10) postes à combler au Conseil d'administration lors de la prochaine élection.

Chaque candidature, pour être recevable, doit être signée du candidat et de cinq (5) membres en règle et doit préciser le poste convoité. Un membre ne peut se présenter qu'à un seul poste.

La période de mise en candidature se termine à midi le samedi 17 octobre 1981. La formule de mise en candidature doit parvenir au président d'élection avant cette heure limite.

Postes à combler au Comité exécutif:
- Président
- Vice-président aux services
- Trésorier

Les trois (3) postes mentionnés ont une durée de deux ans.

Postes à combler au Conseil d'administration (pour une durée d'un an):
Représentant de la région 1 Bas St-Laurent
Représentant de la région 2 Saguenay/Lac St-Jean
Représentant de la région 3 Québec
Représentant de la région 4 Trois-rivières
Représentant de la région 5 Estrie
Représentant de la région 6 Montréal (6 Nord)
Représentant de la région 6 Montréal (6 Sud)
Représentant de la région 6 Montréal (Ile-de-Montréal) Représentant de la région 7 Outaouais
Représentant de la région 8 Nord-Ouest

Pour chaque poste contesté, l'élection doit se faire par courrier: un bref curriculum de chaque candidat et un bulletin de vote sont expédiés à chaque membre en règle, et ce dans la semaine qui suit le congrès.

CORRESPONDANCE AMQ

Sur les deux pages suivantes, vous trouverez pour votre information, deux lettres faisant partie de la correspondance de l'AMQ.