LE CUBE DE RUBIK[1]

par Fernand Lemay

1. Introduction

Le *cube de Rubik* est un agencement de 27 petits cubes dont les faces visibles (on ne verra jamais celui enfermé à l'intérieur) empruntent leurs couleurs aux six faces du cube principal. Une construction très astucieuse permet de tourner chacune des six faces sur elle-même, globalement et indépendamment, et d'induire ainsi une extraordinaire profusion d'états multicolores[2]. *Le problème est de rendre au cube multicolore son aspect ordonné initial (où chacune des six faces retrouve une couleur homogène).*

Il est entendu que les cubes situés dans les coins ne pourront, au cours des opérations, qu'occuper l'un des huit coins. De même l'évolution des petits cubes qui occupent le milieu des arêtes sera limitée aux *12* (ou *24* si on tient compte de l'orientation) positions de même espèce. Quant aux six facettes centrales, elles ne peuvent que pivoter sur elles-mêmes. L'invariance des positions relatives des facettes centrales constitue ainsi un *repère* permettant de reconnaître la destination de chacun des éléments du cube: un **sommet** sera caractérisé par trois coordonnées (les couleurs de ses faces), une **arête** par deux coordonnées.

2. Transition des sommets

Si quelque sommet *a* se trouve hors position, il doit déloger celui, *b*, qui tient sa place et, à son tour, *b* devra déloger celui qui occupe la sienne... mais il se pourrait bien sûr que *a* et *b* détiennent leurs places réciproques

$$a \leftrightarrow b$$

et il nous faudrait dans ce cas *transposer* le couple (*a*,*b*). Le plus souvent cependant, si *b* est délogé par *a*, ce sera un *autre* élément, *c*, que *b* devra chasser:

$$a \rightarrow b \rightarrow c.$$

Il suffirait alors de pouvoir effectuer une permutation *cyclique* de *a*,*b*,*c* pour replacer *a* et *b* (sinon *c*).

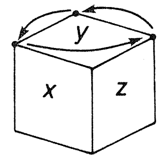
Rien ne nous empêche de rechercher des permutations cycliques de *4*,*5*,... éléments

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow \ldots$$

mais, naturellement, leur génération par les seules rotations des faces du cube s'avère de plus en plus difficile.

3. Deux premiers opérateurs

Formons le composé des quatre rotations *autour des murs* du cube; il en résulte une permutation cyclique de trois sommets:

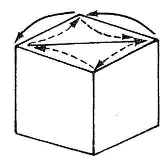


$\boxed{xz} \triangleq xz'x'z$ (3)

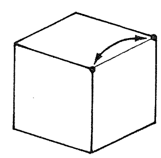
La permutation inverse sera obtenue naturellement en renversant l'ordre de parcours des murs et le sens de gyration des rotations:

$$\boxed{\bar{z}\bar{x}} = \bar{z}\bar{x}'\bar{z}'\bar{x}$$

Il ne suffit plus que d'opérer le *collage* de $\boxed{xz}$ et de la rotation *y*



pour composer un *commutateur*

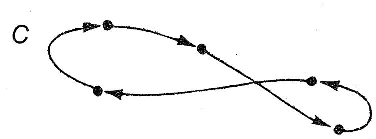


$y \bullet \boxed{xz}$

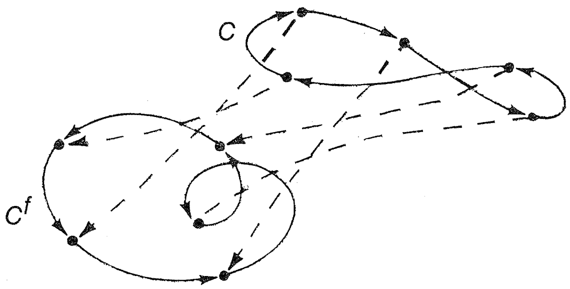
apte à transposer tout couple de sommets voisins.

4. Orbite d'un cycle

Considérons un *cycle quelconque C* liant certains éléments du cube



ainsi qu'une transformation quelconque, *f*, de l'ensemble des éléments du cube. *L'effet de f sur ce cycle C sera un nouveau cycle que nous noterons* C^f



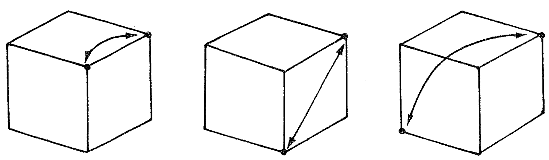
et, si f est *bijective*, ce nouveau cycle s'exprimera

$$C^f = \bar{f} C f.$$

L'ensemble des formes susceptibles d'être ainsi prises par un cycle sous l'effet des diverses permutations constituera l'*orbite du cycle*.

5. Orbite des commutateurs

Voici (à un déplacement près sur le cube) l'orbite du commutateur $\kappa \triangleq y \bullet \boxed{xz}$

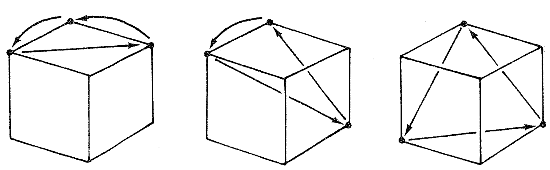


κ κ^X κ^{X^2}

Toutes les transpositions de deux sommets du cube sont désormais possibles.

6. Orbite du cycle *xz*

Voici (à un déplacement près sur le cube) l'orbite d'un *tour des murs*, $\mu = \boxed{xz}$



μ μ^Z $\mu^{\bar{X}Z}$

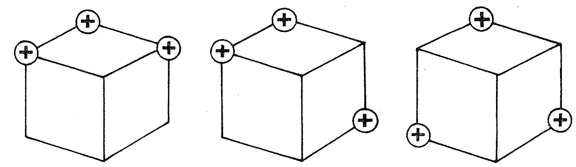
L'orbite du cycle inverse sera naturellement obtenue en remplaçant ci-dessus μ par l'inverse $\bar{\mu} = \boxed{\bar{z}\bar{x}}$.

Nous sommes donc désormais en mesure de replacer, en quatre étapes au plus, tous les sommets du cube.

7. Polarisation des sommets

Tout en étant en position, les sommets pourraient ne pas être bien orientés; d'où la nécessité de *gyrateurs* qui feraient pivoter les sommets sur eux-mêmes.

Une description plus minutieuse de la permutation $\mu = \boxed{xz}$ indique, non seulement que certains sommets circulent autour de trois positions, mais qu'à chaque retour ils ont subi une rotation, ⊕, d'un tiers de tour (vissant dans le cube). En conséquence, μ^3 serait un *gyrateur* que l'on peut tout de suite mettre en orbite



μ^3 $(\mu^3)^Z$ $(\mu^3)^{\bar{X}Z}$

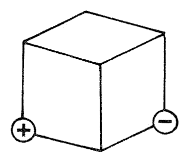
pour obtenir aussitôt toutes les configurations possibles de tels gyrateurs.

Il y aussi, bien sûr, des gyrateurs analogues qui impriment une rotation de sens opposé,

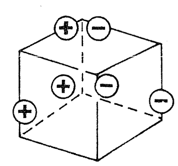
$$\Theta : \bar{\mu}^3,\ (\bar{\mu}^3)^Z,\ (\bar{\mu}^3)^{\bar{X}Z}.$$

8. Dipôles

Si les sommets à réorienter ne se présentent pas par triplets, alors ils se présenteront en *dipôles*

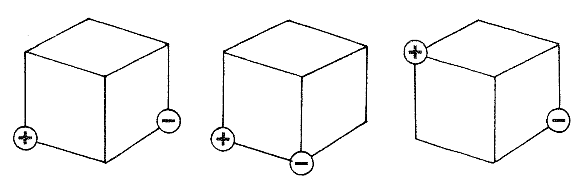


et on peut créer les opérateurs qui les redresseront par collage de gyrateurs convenablement choisis:



$$\delta \triangleq \boxed{x\bar{y}}^3 \bullet \boxed{\bar{z}\bar{y}}^3$$

On en soutire ensuite l'orbite des dipôles:



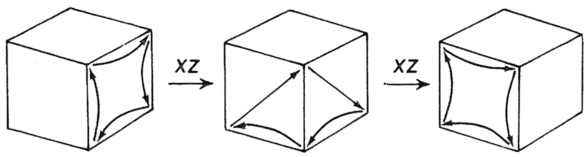
δ δ^Z δ^X

La destination finale de tous les sommets pourra maintenant être atteinte puisque, semble-t-il, les sommets à réorienter ne se présentent jamais qu'en triplets homogènes ou en dipôles.

9. L'inertie des sommets

Le problème de la transition des arêtes est beaucoup plus contraignant que celui de la transition des sommets. Celui-ci pouvait, en effet, être traité sans égard aux arêtes, tandis que maintenant il nous faut poursuivre la forme primitive du cube *en laissant les sommets inertes*.

Propulsons le plus banal des cycles, une rotation, sous l'action de la transformation xz[4]



On voit alors le cycle z prendre la forme x:

$$(z^{xz})^{xz} = x$$

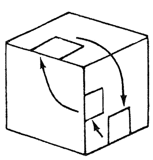
de sorte que l'opérateur

$$g \triangleq \bar{x} \bullet (z^{xz})^{xz}$$

laissera l'ensemble S des sommets absolument *inerte*,

$$g_S = 1_S$$

sans cependant perdre toute influence sur les arêtes:



g

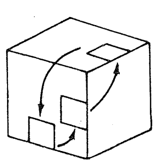
De manière semblable le cycle $\bar{x}$, soumis à l'action de la transformation $\bar{z}\bar{x}$, deviendra $\bar{z}$

$$(\bar{x}^{\bar{z}\bar{x}})^{\bar{z}\bar{x}} = \bar{z}$$

de sorte que l'opérateur

$$f \triangleq z \bullet (\bar{x}^{\bar{z}\bar{x}})^{\bar{z}\bar{x}}$$

sera également *neutralisé* sur l'ensemble S tout en continuant d'agir sur les arêtes:



f

La notation

$$[zx] \triangleq zxzxz\bar{x}\bar{z}\bar{x}\bar{z}\bar{x}$$

pour désigner le *composé alterné de 10 rotations z,x, les cinq premières telles quelles et les cinq autres en sens opposé*[5]permettra d'exprimer f et g sous une forme commode:

$$f = [zx], \quad g = [\bar{x}\bar{z}].$$

10. Transition des arêtes

Si quelqu'arête se trouve hors position, elle doit déloger celle, b, qui tient sa place; à son tour b devra en déloger une autre, c, à moins que a et b détiennent réciproquement leurs places. Dans le premier cas, la permutation *cyclique*

$$a \rightarrow b \rightarrow c$$

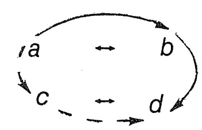
permettrait de replacer a et b (et éventuellement c). Dans l'autre cas,

$$a \leftrightarrow b$$

on rencontrerait également un second couple d'éléments à transposer

$$c \leftrightarrow d$$

puisqu'il est impossible, semble-t-il, de transposer deux arêtes sans altérer aussi d'autres éléments du cube; cette double transposition peut être confiée à deux permutations cycliques



$$(a,b,d) \circ (a,c,d) = (a,b) \circ (c,d).$$

Les arêtes étant toutes ramenées à leurs positions initiales, il ne resterait plus éventuellement qu'à *retourner sur elles-mêmes* certaines arêtes mal orientées. D'où la double tâche d'*engendrer toutes les permutations cycliques de trois arêtes* et celle de *construire des* **alternateurs**.

Nous entreprendrons directement la construction de permutations *opérant dans l'ensemble des 24 arêtes orientées* (ou de leurs *24* faces).

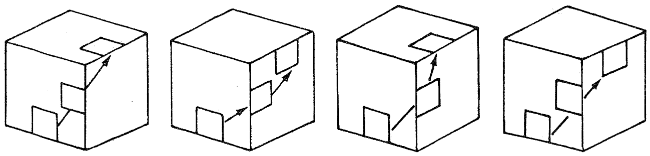
11. Cycles primitifs

En tant qu'objets orientés, trois arêtes (celles, par exemple, qu'actionne l'opérateur f) peuvent être soumises à *seize* permutations cycliques distinctes: les huit suivantes (a et a' désignant ici les faces complémentaires d'une même arête)

$$f: a \rightarrow b \rightarrow c; \quad a' \rightarrow b' \rightarrow c'$$
$$f_1: a' \rightarrow b \rightarrow c; \quad a \rightarrow b' \rightarrow c'$$
$$f_2: a \rightarrow b' \rightarrow c; \quad a' \rightarrow b \rightarrow c'$$
$$f_3: a \rightarrow b \rightarrow c'; \quad a' \rightarrow b' \rightarrow c$$

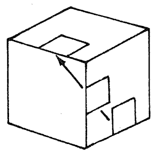
et leurs inverses. Les permutations d'une même ligne n'ont pas à être distinguées car elles ont même effet sur le cube; on se restreindra donc à quatre *cycles* **primitifs**, f, f_1, f_2, f_3.

Nous avons déjà reconstitué le premier de ces cycles mais, en dernière analyse, ils sont tous des composés de rotations (voir figure à la page suivante).



$f = [zx]$ $\quad f_1 = [\bar{y}'\bar{z}]^{z^2}$ $\quad f_2 = [yz]^{\bar{z}x}$ $\quad f_3 = [\bar{x}\bar{y}]^{x^2}$

De façon semblable, l'opérateur g



g

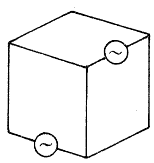
peut induire, dans l'ensemble des arêtes orientées, quatre permutations distinctes

$$g = [\bar{x}\bar{z}],\ g_1 = [y'x]^{x^2},\ g_2 = [\bar{y}\bar{x}]^{x\bar{z}},\ g_3 = [zy]^{z^2}$$

selon qu'on retourne le premier, le second ou le troisième élément (suivant l'ordre prescrit par la flèche du diagramme ci-dessus).

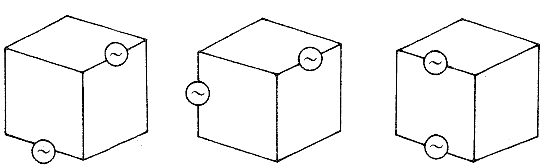
12. Alternateurs

On obtient un alternateur par simple collage de deux cycles primitifs

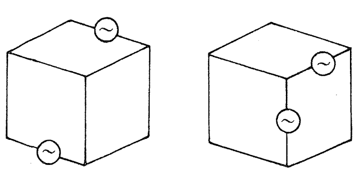


$$\alpha = f\bar{f}_1 = [zx] \bullet [\bar{z}\bar{y}']^{z^2}$$

les autres sont de la même orbite



α $\quad \alpha^x$ $\quad \alpha^y$



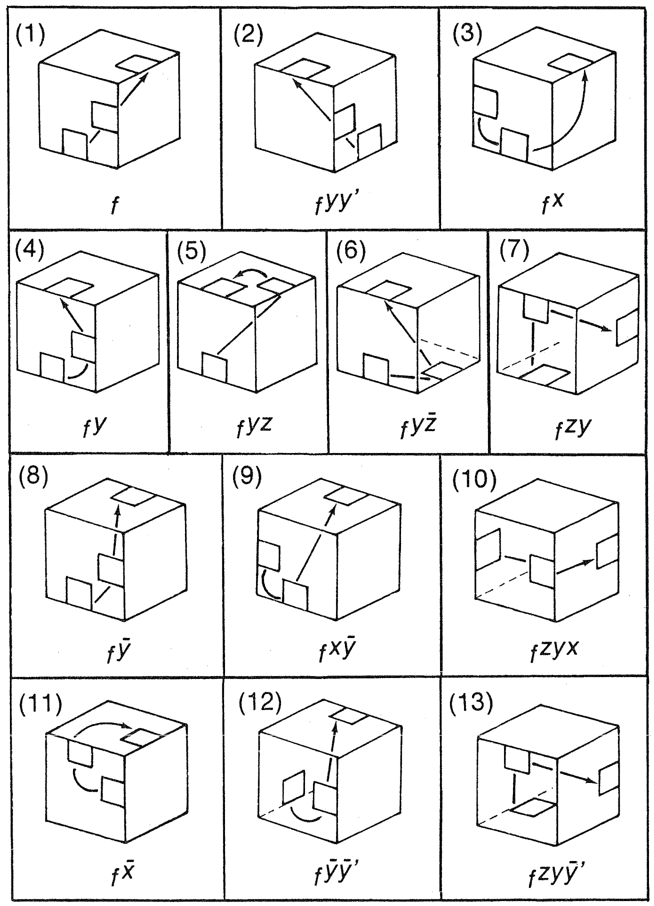
$\alpha^{\bar{y}}$ $\quad \alpha^{\bar{x}}$

13. Classe des permutations cycliques d'arêtes polarisées

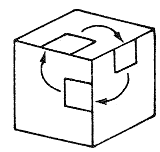
Pour former le catalogue complet des permutations cycliques de trois arêtes orientées, il suffit de mettre l'ensemble $\{a,b,c\}$ en orbite (ce qui produit *13* configurations) puis de *faire porter par ce trio l'un ou l'autre des 4 cycles primitifs (ou leurs inverses)*. On obtient alors le catalogue des *104* espèces de permutations cycliques possibles.

14. Orbite de *f*

L'orbite de f pourra nous servir de référence; celles de f_1, f_2 ou f_3 s'en déduiront en retournant le premier, le second ou le troisième élément de la flèche.



Le tableau ci-dessus représente les treize configurations de l'ensemble $\{a,b,c\}$ supportant le cycle primitif ***f***: $a \rightarrow b \rightarrow c$. La tête et la queue de la flèche représentent c et a respectivement)(6). Le *tourbillon* autour d'un sommet



n'est autre, par exemple, que

$$f_1^{\bar{x}} = xz^2[\bar{y}'\bar{z}]z^2\bar{x}.$$

Le rappel et la polarisation des arêtes peuvent maintenant être réalisés en guère plus de cinq étapes du type précédent et, éventuellement, un recours à l'un des alternateurs. Malgré ses trillions de formes multicolores le cube retrouvera toujours facilement son état original.

---

(1) Voir aussi notre article *Quelques dizaines de trillions de formes multicolores (le cube hongrois).*

(2) Soit $2^{10} \times 3^7 \times 8! \times 12!$, c'est-à-dire $43{,}232... \times 10^{18}$, au delà de quarante trois trillions de formes.

(3) L'inverse d'une rotation x sera notée $\bar{x}$. D'autre part x,x' désigneront des *couleurs complémentaires*, c'est-à-dire provenant de faces opposées du cube.

(4) Dans toutes les figures, y désigne la face de dessus, x celle d'avant gauche et z celle de droite.

(5) Cette opération nous a été communiquée par Jacqueline et Willy Vanhamme.

(6) On aura noté (formule (2)) que $f^{yy'}=g$. D'autre part, les configurations (9)et (13) pourraient être remplacées respectivement par g^{y} et $g^{yy'}$ d'exécution plus brève.

■