CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

LISTE DES GAGNANTS AU CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC POUR L'ANNÉE 1981

1er	Gauthier, Jean-Guy	Collège de Maisonneuve	200 $
2e	Brassard, Pierre	Campus Notre-Dame-de-Foy (Cap-Rouge)	150 $
3e	Gaudreau, Frédéric	Petit séminaire de Québec	80 $
4e	Charbonneau, Alain	Collège Bois-de-Boulogne	50 $
5e	Desjardins, Benoît	Collège Bois-de-Boulogne	40 $
5e	Croteau, Stephan	Collège régional Bourgchemin (Campus de Drummondville)	40 $
7e	Lacombe, Yves	Collège de Maisonneuve	25 $
7e	Tremblay, Dominic	Collège de Maisonneuve	25 $
7e	Normandin, Yves	Collège de Sainte-Foy	25 $
7e	Poirier, Claude	Collège Bois-de-Boulogne	25 $
11e	Fournier, René	Collège Bois-de-Boulogne	15 $
11e	Forest, Luc	Collège de l'Assomption	15 $
13e	Boilard, André	Collège de Lévis	15 $
14e	Martel, Patrice	Petit Séminaire de Québec	15 $
14e	Bernstein, Morris	Vanier College (Snowdon Campus)	15 $
14e	Robidoux, Nicolas	Collège Bois-de-Boulogne	15 $

Mentions honorables

Albert, Joshua	Marianopolis College
April, Peter	Marianopolis College
Béchard, Bruno-Marie	Collège Bois-de-Boulogne
Bouchér, Paule	Collège de l'Assomption
Caouette, Paul	Collège d'Ahuntsic
Crépeau, Claude	Collège d'Ahuntsic
Deschênes, Jean	Petit Séminaire de Québec
Dion, Michel	Collège régional Bourgchemin (Campus de Drummondville)
Dorion, Dominique	Petit Séminaire de Québec
Dufour, François	Collège de Sainte-Foy
Fischer, Stephen	Marianopolis College
Fiske, Stuart	Collège Jean-de-Brébeuf
Fradette, Jean	Collège Bois-de-Boulogne
Gagnon, Boris	Collège de l'Outaouais
Gagnon, Louise	Collège Marie-Victorin
Giguère, Gaëtan	Collège d'Ahuntsic
Godin, Marc	Collège Bois-de-Boulogne
Hains, Gaétan	Collège d'Ahuntsic
Lambert, Gabriel	Collège du Nord-Ouest
Lavoie, Bruno	Collège de Saint-Félicien
Lebeuf, Serge	Collège François-Xavier Garneau
Leclerc, Yves	Collège régional Bourgchemin (Campus de Drummondville)
Lockhead, Claude	Collège Bois-de-Boulogne
Lynn, Brian	Lower Canada College
Marmet, Louis	Collège de Sainte-Foy
Martel, Claude	Collège régional Bourgchemin (Campus de Drummondville)
Moreau, André	Collège d'Ahuntsic
Morin, Pierre	Collège de Saint-Jean-sur-Richelieu
Roy, Marie-France	Collège de Valleyfield
Royer, Joanne	Collège d'Ahuntsic
Saint-Pierre, Joëlle	Petit Séminaire de Québec
Seyer, Daniel	Collège régional Bourgchemin (Campus de Drummondville)
Szanto, Elisabeth	Marianopolis College
Tondreau, Nathalie	Collège de Maisonneuve
Wiener, Michael	Champlain Regional College (Longueuil-St-Lambert Campus)
Zolfaghari, Houman	Collège de Sainte-Foy

CONCOURS NIVEAU COLLÉGIAL I ET II

Le samedi, 28 février 1981 **De 9 heures à 12 heures**

Question 1

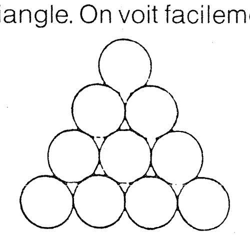
On demande de déterminer les valeurs des chiffres a et b dans le nombre de cinq chiffres a679b, sachant que ce nombre est divisible par 72.

Solution

Puisque $72 = 2^3 \times 3^2$, a679b doit être à la fois divisible par 8 et par 9. Puisqu'il est divisible par 8, le nombre formé par ses trois derniers chiffres doit l'être également. Il faut donc que b = 2. Puisqu'il est divisible par 9, la somme de ses chiffres doit l'être aussi. Il faut donc que a = 3.

Question 2

On connaît bien sûr les nombres carrés. Ils forment la série 1, 4, 9, 16... On connaît moins bien les nombres triangulaires. 10 est un exemple de nombre triangulaire. On peut illustrer ce fait par la figure suivante, où l'on indique comment dix cercles peuvent être disposés en triangle. On voit facilement que les premiers éléments de



la suite des membres triangulaires sont : 1, 3, 6, 10, 15... Sachant ceci, on demande de démontrer que tout nombre carré est la somme de deux nombres triangulaires successifs.

Solution

Soit n^2 un nombre carré. On peut alors écrire

$$n^2 = \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1).$$

Or

$$\frac{1}{2}n(n-1) = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$$

et

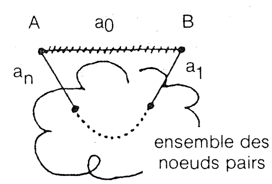
$$\frac{1}{2}n(n+1) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n.$$

Ce qui démontre bien le résultat cherché.

Question 3

Supposons que l'on ait un graphe non dirigé connexe, c'est-à-dire tel qu'il existe toujours un trajet entre deux quelconques de ses points, ce trajet pouvant être parcouru suivant l'une ou l'autre de ses directions. On dira qu'un noeud est pair ou impair selon le nombre des arcs qui le touchent. Il est bien connu que, si tous les noeuds d'un tel graphe sont pairs, il existe toujours un parcours qui, partant de n'importe quel noeud et passant par n'importe quel arc touchant à ce noeud revient au noeud initial après être passé une et une seule fois par chacun des arcs. Vous appuyant sur ce résultat, démontrez que, si un graphe non dirigé possède deux noeuds impairs A et B, alors que tous les autres sont pairs, on peut toujours trouver un parcours partant de B et se terminant à A après être passé une et une seule fois par chacun des arcs.

Solution



Traçons un nouvel arc a_0 joignant A à B. Alors tous les noeuds du graphe deviennent pairs. On peut donc tracer un parcours qui part de A, passe par a_0 et à la fin revient à A. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les arcs qui dans l'ordre constituent après a_0 la suite de ce parcours.

On voit que cette suite d'arcs forme le parcours dont on voulait démontrer l'existence.

Question 4

Prouver que l'équation $x^n + y^n = z^n$, où n est un entier plus grand que 1, n'admet pas de solutions entières pour x, y et z, qui seraient telles que $0 < x \leq n$ et $0 < y \leq n$.

Solution

Supposons qu'il existe un $n > 1$ pour lequel

$$x^n + y^n = z^n \qquad (1)$$

admet une solution entière pour x, y et z, avec $0 < x \leq n$ et $0 < y \leq n$. Alors

$$z^n = | z |^n > x^n ,$$

donc $| z | > x$ et $| z | \geq x + 1$. On en tire les relations suivantes :

$$z^n = |z|^n \geq (x + 1)^n > x^n + n x^{n-1} \geq x^n + x.x^{n-1} = 2x^n .$$

De la même façon, on établirait que

$z^n > 2 y^n$, d'où l'on tirera $2 z^n > 2 x^n + 2 y^n$, ce qui contredit (1).

Question 5

Le professeur Escalarski avait son bureau au troisième. Un jour, il se mit à descendre en marchant un escalier mobile allant vers le bas, et constata qu'il lui fallait 50 pas pour arriver au deuxième étage. Pour tenter une expérience, il remonta au troisième étage par le même escalier. Il lui fallait alors 125 pas, malgré le fait qu'il allait 5 fois plus vite, c'est-à-dire qu'il faisait cinq pas pendant le temps où précédemment il en faisait un. Sachant cela, trouvez le nombre de marches qui seraient visibles si l'escalier mobile était arrêté.

Solution

Soit n le nombre que nous cherchons. Prenons pour unité de temps la durée qu'il fallait au professeur pour faire un pas en descendant. S'il descend dans l'escalier roulant vers le bas, alors en 50 unités de temps, n – 50 marches mobiles se seront déplacées. S'il monte le même escalier, alors 125 – n marches mobiles se seront déplacées, et cela en 125/5 = 25 unités de temps.

On peut donc poser la relation

$$\frac{n-50}{50} = \frac{125-n}{25} ,$$

d'où l'on conclut que n = 100.

Question 6

Soient a, b et c des nombres réels. Montrer que $a \leq b + c$ sachant qu'à chaque fois que $x > b$ et $y > c$, on a $x + y \geq a$.

Solution

Supposons qu'au contraire, $a > b + c$ et prenons

$$x = b + \frac{a-(b+c)}{3}$$

et $y = c + \frac{a-(b+c)}{3}$. Alors, bien sûr, $x > b$ et $y > c$.

Pourtant

$$\begin{aligned} x + y = b + c + 2\left(\frac{a-(b+c)}{3}\right) &= \frac{2a+(b+c)}{3} \\ &= \frac{3a - (a-(b+c))}{3} \\ &= a - \frac{a-(b+c)}{3} \\ &< a . \end{aligned}$$

Les professeurs qui, chaque année, dans les diverses maisons d'enseignement du Québec, s'occupent des concours de l'AMQ sont fréquemment à la recherche d'exercices qui permettraient à leurs étudiants de se préparer à la tenue de ce concours.

Nous portons à leur attention, CRUX MATHEMATICORUM, une petite revue canadienne, dont chaque numéro fourmille de problèmes susceptibles de les intéresser. On peut s'y abonner en s'adressant à :

F.G.B. Maskell
Collège Algonquin
200, avenue Tees
Ottawa, Ontario
K1S 0C5

L'abonnement annuel est de 12 $. Il est également possible de se procurer des numéros des années précédentes.

Claude Boucher
Organisateur du concours au
niveau collégial