LE JEU DU SOLITAIRE
ou comment l'algèbre peut enrayer la calvitie

Élise Brossard
Université du Québec à Chicoutimi

Le jeu du solitaire, très en vogue chez les riches prisonniers de Louis XIV à la Bastille, vient de connaître un regain d'intérêt sous la direction avisée des Américains qui l'ont lancé dans le commerce en l'affublant du nom de H1-Q.

Ce jeu nous a intéressés parce que c'est un jeu suffisamment difficile et parce que la recherche d'une solution générale a mis en application des notions algébriques : le groupe de Klein, la notion d'invariant, la notation matricielle, l'arithmétique modulaire. Nous avons effectué cette recherche pendant le cours de Didactique de l'Algèbre (hiver 80) regroupant les étudiants de la maîtrise-réseau en mathématiques de l'Université du Québec. Les étudiants étant tous des professionnels de l'enseignement, le jeu nous a de plus permis de réfléchir sur des techniques heuristiques et sur le sens du « si et seulement si ».

L'algèbre ne nous a pas donné une solution complète au problème que nous nous étions posé. Du moins avons-nous, grâce à elle, cessé de nous arracher les cheveux de la tête en cherchant à résoudre les cas impossibles. La calvitie avait commencé son oeuvre ; elle a été enrayée.

Le jeu

Le jeu se joue à une seule personne et demande une grille et 32 jetons.

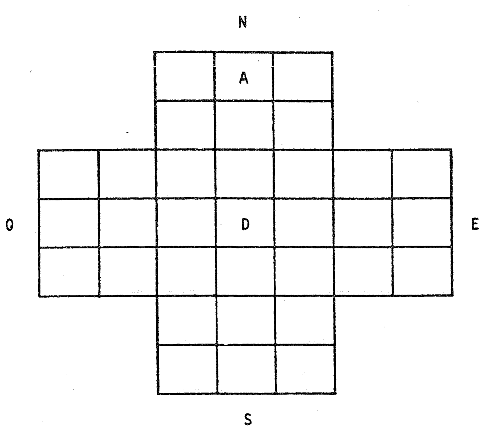

Tableau 1

On couvre les cases de la grille, sauf la case D. On se débarrasse des jetons un à un, en faisant passer un jeton par-dessus son voisin (dans n'importe laquelle des quatre directions Nord, Sud, Est ou Ouest), et en le déposant dans une case vide ; on enlève le jeton par-dessus lequel on a passé.

On gagne si en continuant ainsi, on arrive à n'avoir plus qu'un seul jeton placé dans la case A.

Le problème

1. Est-il possible de gagner à ce jeu ?
2. Si l'on modifie les cases de départ D et d'arrivée A, on obtient 33^2 variantes du jeu. (La case de départ peut coïncider avec la case d'arrivée). Combien de ces jeux sont distincts, si on identifie les jeux symétriques par une rotation ou une réflexion de la grille dans ses axes vertical et horizontal ? Combien sont des jeux gagnants ?

Solution partielle : au plus 21 jeux gagnants distincts

Chaque coup du jeu fait entrer en ligne de compte seulement 3 cases adjacentes, dans un des quatre ordres permis.

Étiquetons les positions de la grille de façon à ce que 3 cases adjacentes, horizontales ou verticales, portent des étiquettes distinctes, soient a, b et c.

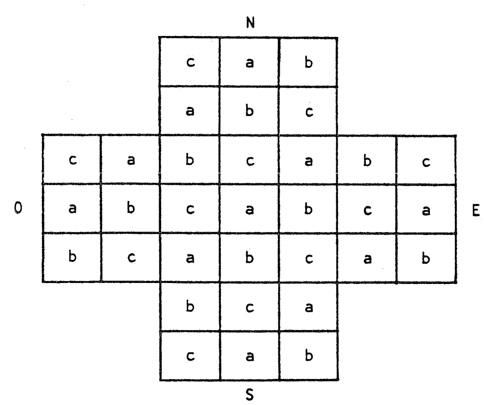

Tableau 2

Le groupe de Klein est le groupe comprenant quatre éléments, e, a, b, c ; e est le neutre ; $a^2 = b^2 = c^2 = e$; le produit de deux des éléments a, b et c est le troisième élément.

Avant chaque coup, deux positions adjacentes sont occupées ; après, seule la troisième est occupée, donc le produit des étiquettes des positions occupées est invariant. Le produit des 32 cases occupées au début du jeu est l'étiquette de la case de départ ; donc l'étiquette de la case d'arrivée doit être la même. Il y a au plus 33 x 11 jeux gagnants.

Des considérations de symétrie nous font éliminer encore d'autres jeux : en étiquetant la grille précédente, nous avons travaillé (tout à fait arbitrairement) à partir de la première rangée (complétée) d'ouest en est ; nous aurions pu travailler d'est en ouest ; ajoutons ce nouvel étiquetage sur la grille, en écrivant a b c pour distinguer du précédent.

N

			cb	aa	bc			
			ac	bb	ca			
	cc	ab	ba	cc	ab	ba	cc	
O	aa	bc	cb	aa	bc	cb	aa	E
	bb	ca	ac	bb	ca	ac	bb	
			ba	cc	ab			
			cb	aa	bc			

S

Tableau 3

Le raisonnement fait plus haut reste valable ; seuls seront gagnants les jeux dont la case de départ et la case d'arrivée portent la même double étiquette. Enfin, compte-tenu des symétries de la grille, il n'y a que sept points de départs distincts, ce qui élimine encore un certain nombre de jeux à examiner.

Pour identifier les jeux possiblement gagnants, introduisons une numérotation matricielle des cases de la grille.

N

			13	14	15			
			23	24	25			
	31	32	33	34	35	36	37	
O	41	42	43	44	45	46	47	E
	51	52	53	54	55	56	57	
			63	64	65			
			73	74	75			

S

Tableau 4

Nous choisissons comme cases de départ, distinctes à symétrie près :

44, 45, 46, 47, 57, 56, 55.

Les jeux identifiés dans le tableau suivant sont les seuls jeux distincts possiblement gagnants.

	Départ	Arrivées	Nombre de jeux par départ
1	44	14 44	2
2	45	42 45 15	3
3	46	43 46 13	3
4	47	41 44 47 74	4
5	57	51 54 57 24	4
6	56	53 56 23	3
7	55	55 25	2

Au plus, 21 jeux gagnants distincts

Solution complète : exactement 21 jeux gagnants distincts

Montrer qu'il y a au plus 21 jeux gagnants distincts n'est pas montrer qu'il y en a de fait 21. Nous nous sommes donné le plaisir de chercher les solutions aux 21 jeux et nous les avons trouvées toutes, mais à nous tous, de Chicoutimi, Rimouski, Québec ou Trois-Rivières. Nous n'avons pas trouvé de façon générale d'attaquer les 21 problèmes, mais nous avons réfléchi sur des techniques d'heuristique :

1. essais et erreurs (méthode inévitable pour s'imprégner du problème)
2. recherche de patrons (mis en évidence par l'emploi de jetons de couleurs alternantes, un jeton ne pouvant atterrir que sur la moitié des cases de la grille ; il y a des cases « paires » et des cases « impaires », etc.)
3. brain-storming
4. hypothèse du problème résolu ; jeu fait en sens inverse.

Nous avons retenu qu'en général, il vaut mieux vider les coins à tour de rôle avant de s'attaquer aux jetons du centre.

Les solutions ne sont toutefois pas uniques et le problème du nombre de solutions distinctes pour chaque jeu est resté ouvert pour nous.

1. **Départ :** 44 **Arrivée :** 14 ou 44

N.B. x-y signifie : envoyer le pion de la case x dans la case y

64-44 ; 52-54 ; 73-53 ; 54-52 ; 56-54 ; 44-64 ; 74-54 ; 75-55 ; 54-56 ; 57-55 ; 51-53 ; 45-65 ; 43-63 ; 47-45 ; 41-43 ; 35-55 ; 33-53 ; 65-45 ; 63-43 ; 15-35 ; 13-33 ; 45-25 ; 43-23 ; 37-35 ; 34-36 ; 31-33 ; 33-13 ; 13-15 ; 15-35 ; 36-34 ; 34-14 ou 24-44.

2. **Départ :** 45 **Arrivée :** 45 ou 42

65-45 ; 57-55 ; 45-65 ; 25-45 ; 37-35 ; 45-25 ; 47-45 ; 15-35 ; 75-55 ; 34-36 ; 54-56 ; 14-34 ; 74-54 ; 33-35 ; 53-55 ; 36-34 ; 56-54 ; 31-33 ; 51-53 ; 34-32 ; 54-52 ; 73-53 ; 43-63 ; 45-43 ; 42-44 ; 13-33 ; 33-31 ; 31-51 ; 51-53 ; 63-43 ; 43-45 ou 44-42.

3. **Départ :** 45 **Arrivée :** 15

65-45 ; 57-55 ; 45-65 ; 25-45 ; 37-35 ; 45-25 ; 15-35 ; 47-45 ; 45-25 ; 75-55 ; 54-56 ; 74-54 ; 53-55 ; 56-54 ; 73-53 ; 53-55 ; 34-54 ; 55-53 ; 43-63 ; 51-53 ; 63-43 ; 33-53 ; 41-43 ; 53-33 ; 23-43 ; 31-33 ; 43-23 ; 13-33 ; 14-34 ; 33-35 ; 35-15.

4. **Départ :** 46 **Arrivée :** 46 ou 43

44-46 ; 65-45 ; 57-55 ; 45-65 ; 25-45 ; 37-35 ; 45-25 ; 47-45 ; 15-35 ; 75-55 ; 34-36 ; 54-56 ; 14-34 ; 74-54 ; 33-35 ; 53-55 ; 36-34 ; 56-54 ; 31-33 ; 51-53 ; 34-32 ; 54-52 ; 73-53 ; 43-63 ; 13-33 ; 33-31 ; 31-51 ; 51-53 ; 63-43 ; 42-44 ; 44-46 ou 45-43.

5. **Départ :** 46 **Arrivée :** 13

44-46 ; 65-45 ; 57-55 ; 45-65 ; 25-45 ; 37-35 ; 45-25 ; 47-45 ; 15-35 ; 75-55 ; 34-36 ; 54-56 ; 14-34 ; 74-54 ; 33-35 ; 53-55 ; 36-34 ; 56-54 ; 31-33 ; 51-53 ; 34-32 ; 54-52 ; 42-44 ; 45-43 ; 13-33 ; 43-23 ; 73-53 ; 53-51 ; 51-31 ; 31-33 ; 33-13.

6. **Départ :** 47 **Arrivée :** 41 ou 44

45-47 ; 65-45 ; 44-46 ; 57-55 ; 47-45 ; 45-65 ; 25-45 ; 37-35 ; 45-25 ; 15-35 ; 75-55 ; 34-36 ; 54-56 ; 14-34 ; 74-54 ; 33-35 ; 53-55 ; 36-34 ; 56-54 ; 31-33 ; 51-53 ; 34-32 ; 54-52 ; 13-33 ; 43-23 ; 73-53 ; 53-51 ; 51-31 ; 31-33 ; 23-43 ; 43-41 ou 42-44.

7. **Départ :** 47 **Arrivée :** 47

45-47 ; 65-45 ; 57-55 ; 45-65 ; 75-55 ; 54-56 ; 37-57 ; 57-55 ; 43-45 ; 24-44 ; 44-46 ; 52-54 ; 55-53 ; 74-54 ; 54-52 ; 73-53 ; 41-43 ; 43-63 ; 51-53 ; 63-43 ; 32-34 ; 13-33 ; 34-32 ; 31-33 ; 43-23 ; 15-13 ; 13-33 ; 36-34 ; 33-35 ; 25-45 ; 45-47.

8. **Départ :** 47 **Arrivée :** 74

45-47 ; 65-45 ; 44-46 ; 47-45 ; 57-55 ; 45-65 ; 75-55 ; 73-75 ; 25-45 ; 45-65 ; 75-55 ; 54-56 ; 37-35 ; 24-44 ; 43-45 ; 35-55 ; 23-43 ; 31-33 ; 43-23 ; 13-33 ; 15-13 ; 41-43 ; 43-23 ; 13-33 ; 63-43 ; 56-54 ; 51-53 ; 54-52 ; 33-53 ; 52-54 ; 54-74.

9. **Départ :** 57 **Arrivée :** 57 ou 54

55-57 ; 75-55 ; 54-56 ; 57-55 ; 74-54 ; 54-56 ; 52-54 ; 73-53 ; 54-52 ; 51-53 ; 43-63 ; 41-43 ; 33-53 ; 63-43 ; 35-33 ; 32-34 ; 13-33 ; 34-32 ; 31-33 ; 43-23 ; 14-34 ; 44-24 ; 15-35 ; 23-25 ; 35-15 ; 37-35 ; 45-25 ; 15-35 ; 47-45 ; 35-55 ; 55-57 ou 56-54.

10. **Départ :** 57 **Arrivée :** 51

55-57 ; 75-55 ; 54-56 ; 57-55 ; 52-54 ; 55-53 ; 74-54 ; 54-52 ; 73-53 ; 43-63 ; 51-53 ; 63-43 ; 34-54 ; 33-53 ; 54-52 ; 35-55 ; 47-45 ; 55-35 ; 25-45 ; 37-35 ; 45-25 ; 15-35 ; 14-34 ; 35-33 ; 32-34 ; 13-33 ; 34-32 ; 31-33 ; 41-43 ; 33-53 ; 53-51.

11. **Départ :** 57 **Arrivée :** 24

55-57 ; 75-55 ; 54-56 ; 57-55 ; 74-54 ; 54-56 ; 52-54 ; 73-53 ; 53-55 ; 56-54 ; 33-53 ; 54-52 ; 51-53 ; 41-43 ; 53-33 ; 23-43 ; 31-33 ; 43-23 ; 35-55 ; 47-45 ; 55-35 ; 25-45 ; 37-35 ; 45-25 ; 15-35 ; 34-36 ; 14-34 ; 13-33 ; 33-35 ; 36-34 ; 44-24.

12. **Départ :** 56 **Arrivée :** 56 ou 53

54-56 ; 57-55 ; 74-54 ; 54-56 ; 75-55 ; 56-54 ; 53-55 ; 36-56 ; 56-54 ; 35-55 ; 37-57 ; 54-56 ; 57-55 ; 73-53 ; 43-63 ; 51-53 ; 63-43 ; 33-53 ; 41-43 ; 53-33 ; 23-43 ; 31-33 ; 43-23 ; 15-35 ; 35-33 ; 14-34 ; 34-32 ; 13-33 ; 32-34 ; 34-54 ; 54-56 ou 55-53.

13. **Départ :** 56 **Arrivée :** 23

54-56 ; 57-55 ; 36-56 ; 56-54 ; 37-57 ; 35-55 ; 54-56 ; 57-55 ; 74-54 ; 54-56 ; 75-55 ; 56-54 ; 53-55 ; 34-54 ; 55-53 ; 52-54 ; 73-53 ; 54-52 ; 51-53 ; 43-63 ; 41-43 ; 33-53 ; 63-43 ; 13-33 ; 32-34 ; 25-23 ; 15-13 ; 13-33 ; 34-32 ; 31-33 ; 43-23.

14. **Départ :** 55 **Arrivée :** 55 ou 25

75-55 ; 45-65 ; 57-55 ; 65-45 ; 35-55 ; 54-56 ; 37-57 ; 57-55 ; 36-56 ; 56-54 ; 53-55 ; 74-54 ; 55-53 ; 43-45 ; 52-54 ; 73-53 ; 54-52 ; 51-53 ; 23-43 ; 53-33 ; 41-43 ; 43-23 ; 31-33 ; 34-32 ; 13-33 ; 32-34 ; 15-35 ; 35-33 ; 14-34 ; 33-35 ; 35-55 ou 45-25.

Conclusion

La solution au problème peut être formulée de façon très concise si on utilise l'arithmétique modulaire et la numérotation matricielle des cases de la grille.

Un jeu est caractérisé par son point de départ ij et son point d'arrivée kl.

> Un jeu est possible si et seulement si $i \equiv k \pmod 3$
> et $j \equiv l \pmod 3$

La vérification est directe (tableaux 3, 4 et 5).

Références

McKerrell, A. — Solitaire : An application of the Four-Group. Mathematics Teaching, no 60, p. 38.

Scully, D.B. — A Rational for Solitaire, International Journal of Mathematical Education, 1976, vol. 7, p. 121-123.

Tapson, Frank — Solitaire, Mathematics Teaching, no 62, p. 29.

Note : Des variantes du Solitaire (en triangle, en carré, en étoile) ont été analysées à l'aide de l'informatique par Gilbert Boucher (Rimouski) qui conclut que le groupe de Klein donne dans le premier cas une condition nécessaire mais non suffisante de l'existence de solutions. ■