CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHEMATIQUE DU QUEBEC

NIVEAU COLLEGIAL (24 FEVRIER 1979)

Question 1

Voici une opération codée:

$$\begin{array}{r} N\ E\ U\ F \\ +\quad U\ N \\ +\quad \underline{U\ N} \\ O\ N\ Z\ E. \end{array}$$

Déterminez le chiffre représenté par chacune des lettres pour que l'addition qui en résulte soit correcte dans le système décimal.

N.B.: Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents, et la lettre O ne représente pas nécessairement zéro.

Question 2

Le premier janvier, les organisateurs d'un concours avaient reçu un nombre d'entrées correspondant à un carré parfait. Le 4 janvier, ayant reçu 100 nouvelles entrées, ils ont maintenant un nombre d'entrées correspondant à un carré parfait plus une unité. Le 7 janvier, ils ont reçu 100 nouvelles entrées et ont, à nouveau, un nombre d'entrées correspondant à un carré parfait. Trouvez le nombre d'entrées que les organisateurs avaient reçues le premier janvier.

Question 3

PARTIE A

Trouvez toutes les valeurs de x pour lesquelles

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

si n est pair.

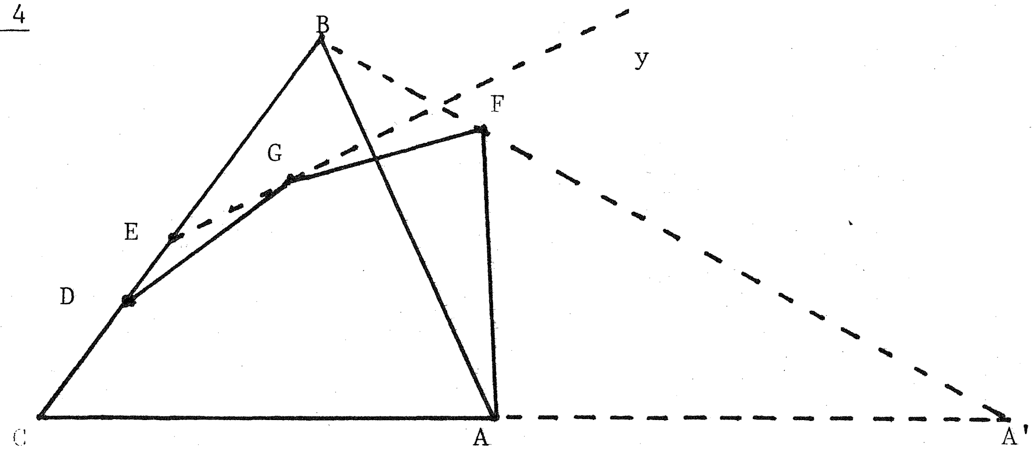
PARTIE B

Considérons l'ensemble E des points (x,y) dont les coordonnées satisfont l'équation suivante:

$$\log_x 3 + \log_{3x} y = \log_x y.$$

Montrez que tous les points de E appartiennent à une même droite.

Question 4



Soit ABC un triangle quelconque. Prenons D un point quelconque sur $\overline{CB}$ et E un point quelconque sur $\overline{DB}$. On mène la parallèle au segment de droite $\overline{EA}$ passant par B; elle coupe le prolongement de $\overline{CA}$ en A'. Prenons F un point quelconque sur $\overline{BA'}$. Menons maintenant une parallèle Ey au segment de droite $\overline{DF}$ et prenons G un point quelconque sur Ey.

Démontrez que le triangle ABC et le pentagone AFGDC ont la même aire.

Question 5

Trouvez tous les polynômes

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

où $n \geq 0$, pour lesquels on a l'égalité

$$p(x^2) = (p(x))^2$$

pour tout x réel.

Question 6

On sait qu'un échiquier comporte 64 cases disposées en 8 rangées et 8 colonnes. On place dans quelques-unes de ces cases un jeton de telle sorte que les 8 rangées soient remplies différemment. De plus, pour tout choix de deux rangées A et B (A et B pouvant désigner la même rangée), on peut trouver une rangée C telle que la $i^{\text{ième}}$ case de C soit vide si et seulement si les $i^{\text{ièmes}}$ cases de A et de B sont toutes deux vides ou toutes deux remplies, et ceci pour $i = 1,2,\dots,8$.

Appelons enfin poids d'une rangée ou d'une colonne, le nombre de jetons qu'elle contient.

(1°) Montrez que le nombre de rangées de poids pair est 4 ou 8.

(2°) Montrez que toutes les colonnes non-vides ont le même poids.