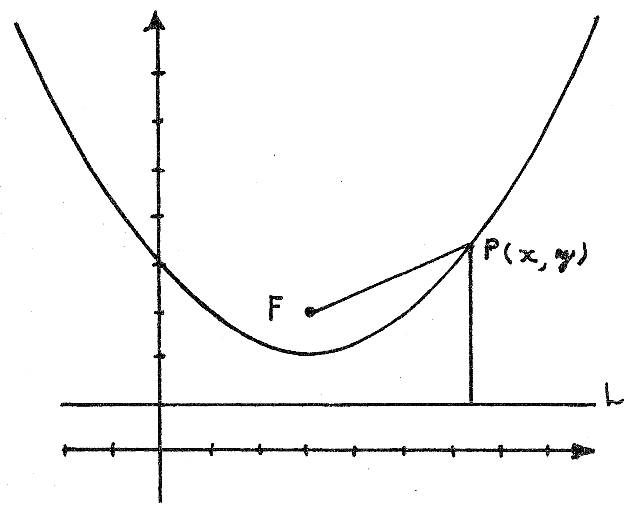
COIN DU PROBLEME

DETERMINATION DU FOYER D'UNE PARABOLE ET D'UN PARABOLOIDE DE REVOLUTION

PAR: FRANCOIS PAQUET, ETUDIANT
COL. MERICI

$y = ax^2 + bx + c$. Voilà un polynôme bien familier à tous les mathématiciens. Ses propriétés et ses secrets? Bien connus depuis fort longtemps. Sa forme géométrique? On l'obtient par section d'un cône de révolution par un plan parallèle à l'un des plans tangents à la surface latérale du cône. Cette conique s'appelle une parabole. On observe aussi qu'elle est le lieu des points (x,y) équidistants d'un point F donné et d'une droite L donnée, respectivement appelés le foyer et la directrice.



Malgré sa simplicité, cette forme géométrique possède certaines propriétés qui n'auront pas manqué d'intéresser les physiciens. Notamment le miroir parabolique qui fait converger la lumière et les ondes radio vers le foyer. Voilà qui est intéressant, non seulement pour le physicien, mais aussi pour le mathématicien car ceux-ci, en combinant les propriétés physiques et mathématiques du miroir parabolique pour fin d'étude, en viendront à la conclusion que toute conique s'exprimant sous la forme:

$$y = ax^2 + bx + c$$

admet son foyer au point

$$F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) \text{ où } \Delta = b^2 - 4ac$$

et que tout paraboloïde de révolution s'exprimant sous la forme:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = \frac{z-\gamma}{c}$$

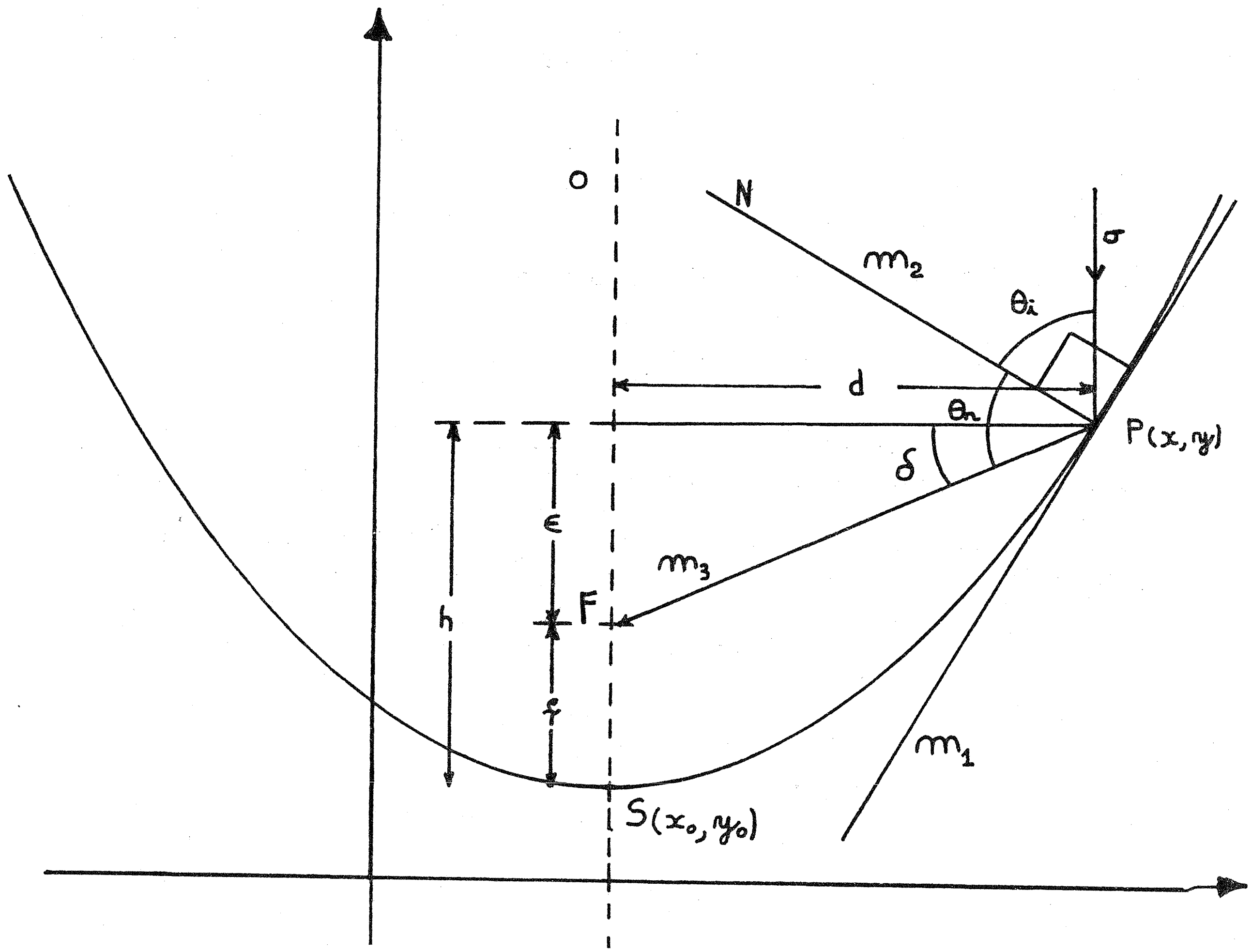
admet son foyer au point

$$F\left(\alpha, \beta, \frac{a^2}{4c} + \gamma\right).$$

Avant de faire la démonstration de ces résultats, assurons-nous que tout rayon lumineux qui pénètre parallèlement à l'axe de symétrie d'un miroir parabolique converge bien en un point fixe situé à une distance f du sommet de la "parabole de révolution".

Démonstration 1

Soit un miroir parabolique engendré par révolution de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ autour de son axe de symétrie et soit le plan de section $x \cdot y$ passant évidemment par l'axe de symétrie du paraboloïde.



En faisant pénétrer un rayon lumineux σ, celui-ci sera réfléchi vers l'axe 0 en respectant la condition suivante:

angle d'incidence = angle de réflexion

$$\theta i = \theta r$$

(Le lecteur voudra bien idéaliser le problème en considérant le miroir comme étant parfaitement réfléchissant). De plus, nous avons la relation suivante:

$$f = h - \varepsilon \qquad (1)$$

où $$h = ax^2 + bx - ax_0^2 - bx_0^2$$

or x_0 est la coordonnée x du sommet de la parabole, donc:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

alors $$h = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} \qquad (2).$$

Ensuite on observe que

$$\varepsilon = d \tan \delta$$

où $$d = x + \frac{b}{2a}$$

on trouve alors que

$$\varepsilon = \frac{2ax + b}{2a} \tan \delta \qquad (3).$$

Substituant (2) et (3) dans (1), on obtient:

$$f = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{(2ax + b)}{2a} \tan \delta \qquad (4).$$

Voilà qui n'est pas très esthétique!... Nous allons donc exprimer tan δ en fonction de x et de ses constantes.

Nous savons d'une part que tan δ est la pente du "rayon réfléchi". D'autre part, nous avons les relations suivantes:

$$\tan \delta = m_3 + \frac{m_1^2 - 1}{2m_1}$$

$$m_1 = 2ax + b$$

car $$m_3 = \frac{m_1 + m_2}{2} \quad \text{où} \quad m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

et m_1 = dérivée de la fonction.

Par conséquent,

$$\tan \delta = \frac{(2ax + b)^2 - 1}{2(2ax + b)} .$$

On peut alors mettre l'égalité (4) sous la forme:

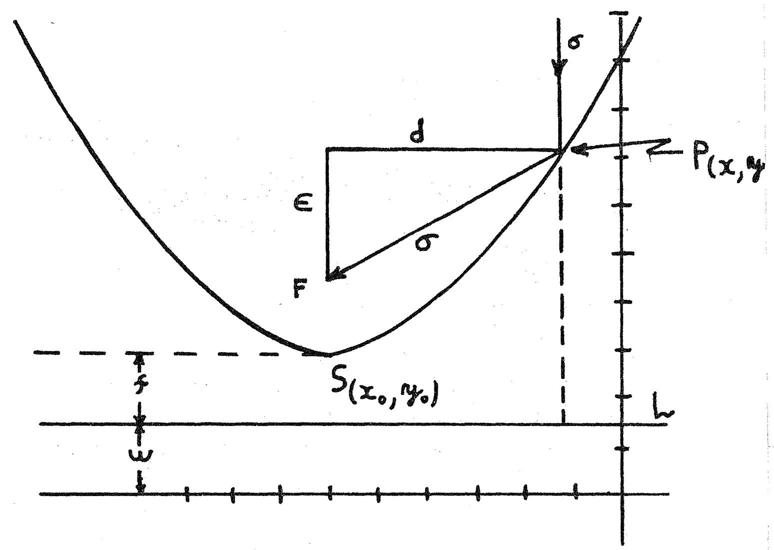
$$f = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{(2ax + b)}{2a} \cdot \frac{(2ax + b)^2 - 1}{2(2ax + b)} .$$

En simplifiant, nous obtenons en définitive:

$$\boxed{f = \frac{1}{4a}} .$$

En raison de quoi nous voyons que la distance f du sommet de la parabole au point F s'exprime indépendamment de x, mais plutôt uniquement en fonction du coefficient de x^2, c'est-à-dire a.

Rendu là, le lecteur pourrait poser la question suivante: Est-ce que ce point à l'intérieur de la parabole, situé sur l'axe de symétrie et à une distance égale à $\frac{1}{4}a$ du sommet de la conique, correspond bien au foyer que nous avons défini géométriquement au début de ce texte?



Nous pouvons faire la vérification de la façon suivante: Si le point F est bien le foyer géométrique de la parabole, alors la relation

$$\overline{PF} = \overline{PL}$$

sera vérifiée.

En vertu du théorème de Pythagore, nous pouvons écrire

$$\overline{PF} = \sqrt{\varepsilon^2 + d^2} \ .$$

Ensuite pour $\overline{PL}$ nous trouvons:

$$\overline{PL} = ax^2 + bx + c - \omega$$

où

$$\omega = ax_0^2 + bx_0^2 + c - f$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c - \frac{1}{4a}$$

par conséquent

$$\overline{PL} = ax^2 + bx + \frac{b^2 + 1}{4a} \ .$$

On retrouve alors

$$\sqrt{\varepsilon^2 + d^2} \overset{?}{=} ax^2 + bx + \frac{b^2 + 1}{4a} \ .$$

Si, dans le membre de gauche, on remplaçait ε et d par leurs valeurs trouvées en pages et , on constaterait que la relation est bien vraie et par conséquent que le point F où "convergent les rayons lumineux" correspond bien au foyer que nous avons défini géométriquement.

(Le développement du membre de gauche étant passablement long, nous laissons le soin au lecteur curieux ou douteux de faire lui-même le développement et de vérifier la véracité de l'égalité).

Ceci étant fait, nous sommes en mesure de démontrer que le foyer $F(x_f, y_f)$ de la parabole $ax^2 + bx + c$ se trouve au point

$$F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Démonstration 2

Il existe deux méthodes de faire le calcul. La première ne saurait aller sans la relation $f = \frac{1}{4}a$ tirée de la démonstration 1.

1ère méthode

Pour évaluer la coordonnée x, il n'y a évidemment aucun problème puisqu'il s'agit de la même valeur que x_0 (ne pas oublier que le point $S(x_0, y_0)$ est le sommet de la parabole) car en ce point, le rayon lumineux est réfléchi sur lui-même. On aura donc pour

$$x = x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Pour la coordonnée y, nous n'avons qu'à ajouter à y_0 la valeur $\frac{1}{4}a$. Or y_0 est la coordonnée y du sommet de la conique, donc:

$$y_0 + \frac{1}{4a} = \frac{-b^2}{4a} + c + \frac{1}{4a}$$

d'où

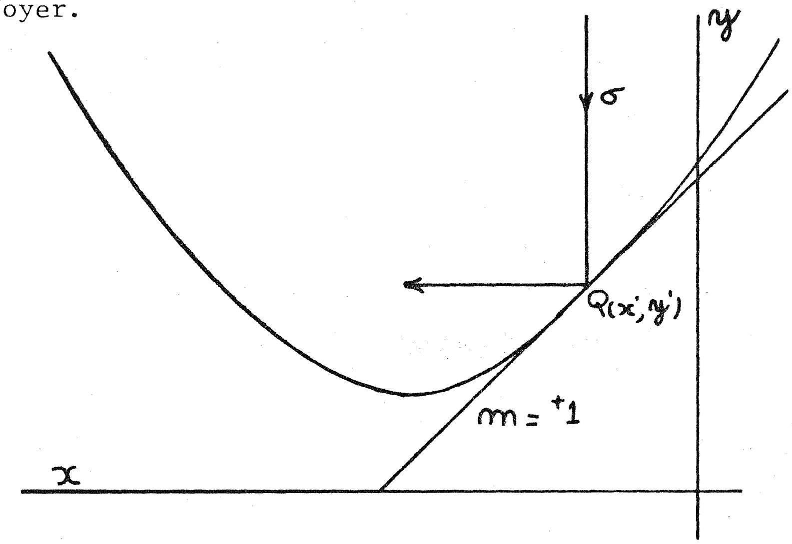
$$y_f = \frac{1-\Delta}{4a}.$$

Par conséquent

$$\boxed{F(x_f, y_f) = F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)}.$$

2^e méthode

Cette méthode diffère de la précédente dans la seule façon de déterminer la coordonnée y du foyer.



Soit un faisceau lumineux pénétrant dans la "parabole" (il s'agit toujours d'une section plane coupant un paraboloïde de révolution et passant par l'axe de symétrie, et soit ce plan, le plan x · y) parallèlement à l'axe y. Le rayon sera réfléchi parallèlement à l'axe x au point Q(x,y) si et seulement si la dérivée de la fonction en ce point est égale à ±1.

Alors $$\frac{dy}{dx} = 2ax' + b = \pm 1.$$

Isolant x' nous trouvons:

$$x' = \frac{\pm 1 - b}{2a} \qquad (5).$$

Substituant (5) dans l'équation

$$y' = ax'^2 + bx' + c$$

on retrouve

$$y' = \frac{1}{4a} - \frac{b^2}{2a} + \frac{b^2}{4a} \pm \frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a} + c$$

$$y' = \frac{1 - b^2}{4a} + c$$

d'où une seconde fois:

$$y_f = \frac{1 - \Delta}{4a} .$$

De façon analogue, nous démontrons que le foyer (vu physiquement) d'un paraboloïde de révolution d'équation

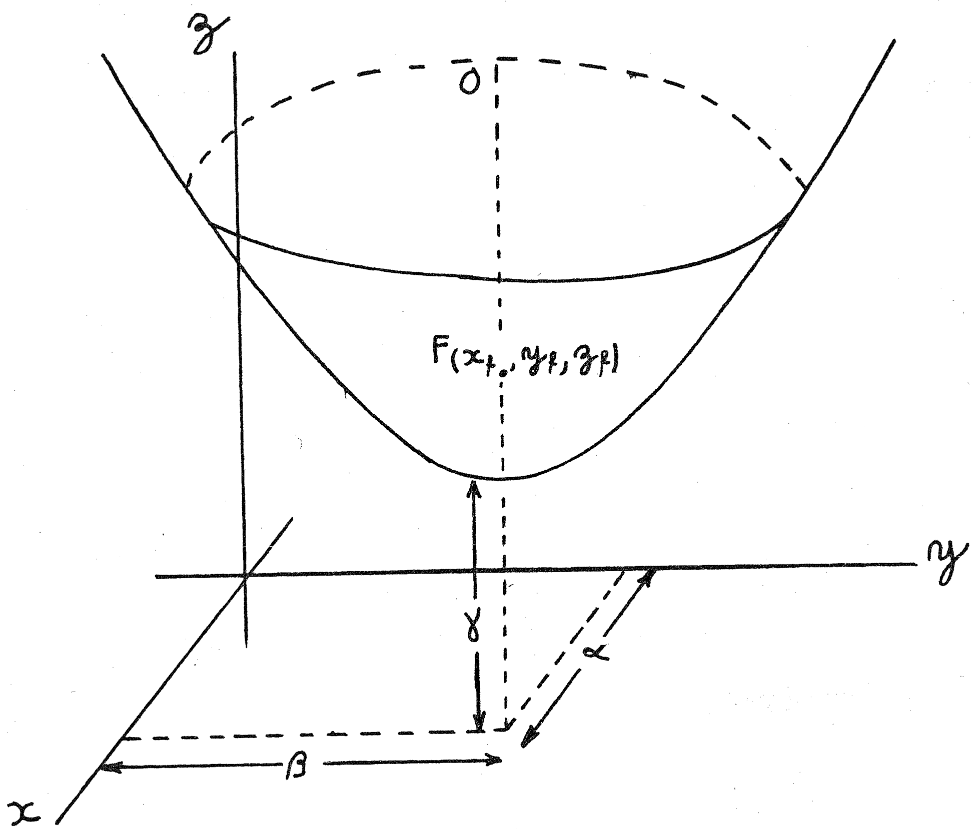
$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = \frac{z - \gamma}{c} \qquad (6)$$

admet son foyer au point

$$F(\alpha,\ \beta,\ \frac{a^2}{4c} + \gamma).$$

Démonstration 3

Soit à déterminer les coordonnées x_f, y_f, z_f du foyer d'un paraboloïde de révolution.



Isolons z dans (6):

$$z = \frac{c(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{c(y - \beta)^2}{a^2} + \gamma \qquad (7).$$

De la même façon que pour la parabole dans $\mathbb{R}^2$, le foyer se trouve "vis-à-vis" (sur l'axe de symétrie) le sommet du paraboloïde. Donc pour déterminer x_f et y_f, il suffit de trouver les valeurs de x et y pour lesquelles la fonction (7) sera un minimum ou un maximum.

On peut alors écrire:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2c}{a^2}(x - \alpha) = 0 \qquad \text{pour} \quad x = \alpha$$

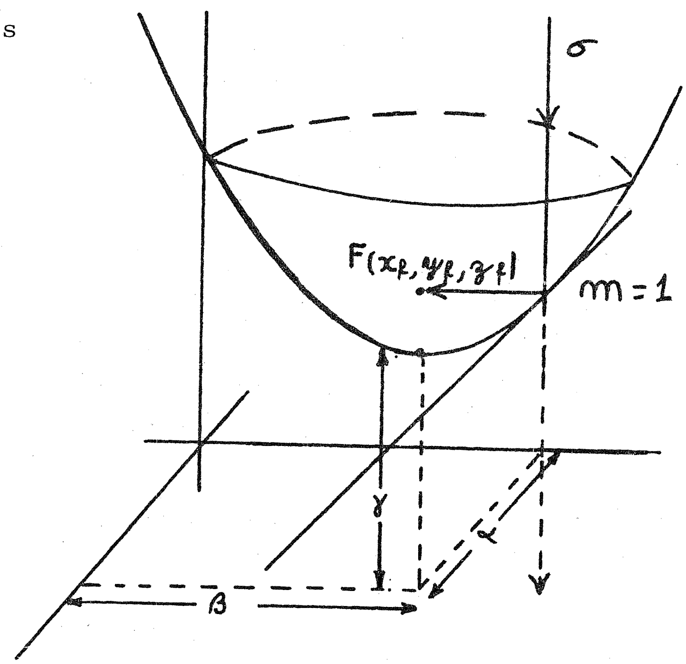
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2c}{a^2}(y - \beta) = 0 \qquad \text{pour} \quad y = \beta.$$

α et β représentent donc les coordonnées du foyer dans le plan $x \cdot y$.

$$\boxed{x_f = \alpha,\ y_f = \beta}.$$

Pour trouver z_f, nous allons chercher des valeurs x_1 et y_1 pour lesquelles $\frac{dz}{dy} = \pm 1$.

Prenons les valeurs $x_1 = \alpha$, $y_1 = ?$



En raison de quoi l'équation (7) devient:

$$z = \frac{c(y - \beta)^2}{a^2} + \gamma$$

d'où

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2c(y - \beta)}{a^2} = \pm 1$$

donc il s'ensuit que

$$y_1 = \frac{\pm a^2}{2c} + \beta .$$

Substituant $x_1 = \alpha$ et $y_1 = \frac{\pm a^2}{2c} + \beta$ dans (7), nous trouvons pour z_f:

$$z_f = \frac{c}{a^2}\frac{(\pm a^2)^2}{4c^2} + \gamma$$

$$z_f = \frac{a^2}{4c} + \gamma.$$

D'où, en définitive, nous obtenons la coordonnée $F(x_f, y_f, z_f)$ du foyer.

$$\boxed{F(x_f, y_f, z_f) = F(\alpha, \beta, \frac{a^2}{4c} + \gamma)} .$$

Remarque: Si le paraboloïde est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z$$

on trouvera le foyer au point

$$F(0, 0, \frac{a^2}{4c}).$$

D'où nous pouvons conclure que la distance focale f est égale à $\frac{a^2}{4c}$.

$$\boxed{f = \frac{a^2}{4c}} .$$

Enfin, nous avons résumé tout cela en un tableau qui à un moment ou l'autre peut trouver son utilité tant entre les mains du mathématicien que du physicien.

Équation	Distance focale f	Point foyer F
$y = ax^2 + bx + c$	$\frac{1}{4a}$	$(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$, $\Delta = b^2 - 4ac$
$x = ay^2 + by + c$	$\frac{1}{4a}$	$(\frac{1-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a})$, $\Delta = b^2 - 4ac$
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = \frac{z-\gamma}{c}$	$\frac{a^2}{4c}$	$(\alpha, \beta, \frac{a^2}{4c} + \gamma)$

	Distance focale (f)	Point foyer (F)
parabole plane:		
$y = ax^2 + bx + c$	$\frac{1}{4a}$	$(\frac{-b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a})$, $\Delta = b^2 - 4ac$
$x = ay^2 + by + c$	$\frac{1}{4a}$	$(\frac{1 - \Delta}{4a}, \frac{-b}{2a})$, $\Delta = b^2 - 4ac$
paraboloïde de révolution:		
$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = \frac{z - \gamma}{c}$	$\frac{a^2}{4c}$	$(\alpha, \beta, \frac{a^2}{4c} + \gamma)$
$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(z - \gamma)^2}{a^2} = \frac{y - \beta}{b}$	$\frac{a^2}{4b}$	$(\alpha, \frac{a^2}{4b} + \beta, \gamma)$
$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{(y - \beta)^2}{b^2} + \frac{(z - \gamma)}{b^2}$	$\frac{b^2}{4a}$	$(\frac{b^2}{4a} + \alpha, \beta, \gamma)$