SOLUTIONNAIRE DU CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHEMATIQUE DU QUEBEC NIVEAU COLLEGIAL 1979

PAR: CLAUDE BOUCHER,
UNIV. SHERBROOKE

Question 1

En tenant compte des différentes retenues possibles, on obtient:

$\emptyset = N + 1$, ($\emptyset$ désignant la lettre O et non le chiffre 0). Donc $N \neq 9$,

$10 + N = E + 2$ ou $E + 1$. Donc $E = 8$ ou 9.

Mais $N \neq$ zéro (sinon $F + O + O = E$, or $F \neq E$)

Donc $E \neq 8$, et par conséquent $E = 9$.

D'où $N = 1$, $\emptyset = 2$, $F = 7$.

En outre $3U = Z + 20$.

D'où $U = 8$ et $Z = 4$, seule possibilité.

On en déduit la solution unique:

$$\begin{array}{r} 1\,9\,8\,7 \\ +\quad 8\,1 \\ +\quad 8\,1 \\ \hline 2\,1\,4\,9 \end{array}$$

Question 2

Soit x le nombre d'entrées reçues le premier janvier. On a les équations:

(1) $x = y^2$

(2) $x + 100 = z^2 + 1$

(3) $x + 200 = w^2$

Question 2 (suite)

L'équation (2) peut s'écrire

$$(2') \qquad x + 99 = z^2$$

soustrayant (2') de (3), on obtient

$$(4) \qquad 101 = w^2 - z^2 = (w - z)(w + z)$$

Comme 101 est un nombre premier, on tire de (4)

$$w - z = 1 \quad \text{et} \quad w + z = 101$$

Donc $w = 51$ et $z = 50$. De l'équation (3), on tire $w^2 - 200 = x$ d'où $x = 2401$.

Question 3

Partie A

L'équation s'écrit:

(1) $\cos^n x = 1 + \sin^n x$ où $n = 2m$ est un entier pair.

Comme $\sin^n x = (\sin^m x)^2 \geq 0$, il en découle que, si x satisfait l'équation (1), nous avons:

$$1 \leq 1 + \sin^n x = \cos^n x \leq 1$$

et donc l'égalité est vérifiée. Il s'ensuit que

$$\sin^n x = 0 \quad \text{et} \quad \cos^n x = 1.$$

On en conclut que

$$\sin x = 0 \quad \text{et} \quad \cos x = \pm 1,$$

et par conséquent

$$x \in \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$$

Question 3:

Partie B

On a $\log_x 3 + \log_{3x} y = \log_x y$

c'est-à-dire

(1) $$\log_{3x} y = \log_x y - \log_x 3 = \log_x \frac{y}{3}$$

Posons $\alpha = \log_{3x} y$. On a donc, par définition

$$y = (3x)^\alpha = 3^\alpha x^\alpha.$$

Mais, $\alpha = \log_x \frac{y}{3}$ (en vertu de (1)) et par conséquent

$$x^\alpha = \frac{y}{3} \quad \text{et} \quad y = 3^\alpha \frac{y}{3}.$$

On en conclut que

$$3 = 3^\alpha \qquad (\text{car } y \neq 0) \text{ et } \alpha = 1.$$

Il s'ensuit que

$\log_{3x} y = 1$ ou $3x = y$, ce qui est l'équation d'une droite.

Question 4

Les aires des triangles FGD et FED sont égales, puisqu'ils ont la même base et la même hauteur.

On en conclut que le pentagone AFGDC possède la même aire que le quadrilatère AFEC.

Mais les triangles AFE et ABE ont eux aussi des aires égales, pour la même raison que précédemment.

Question 4 (suite)

On en conclut que le quadrilatère AFEC possède la même aire que le triangle ABC .

Donc le pentagone AFGDC et le triangle ABC ont la même aire.

Question 5

Excluons le cas trivial $p(x) \equiv 0$. Soit a_k le premier coefficient non nul d'un polynôme satisfaisant $p(x^2) = (p(x))^2$ pour tout x réel. On a alors

$$a_k x^{2k} + a_{k+1} x^{2(k+1)} + \ldots = (a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots)^2$$
$$= a_k^2 x^{2k} + \ldots$$

donc $a_k = a_k^2$ et ainsi $a_k = 1$ (car $a_k \neq 0$). Ainsi $p(x) = x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots$. Soit a_s le premier coefficient non nul (s'il existe) suivant a_k. L'identité devient

$$x^{2k} + a_s x^{2s} + \ldots = (x^k + a_s x^s + \ldots)^2$$
$$= x^k + 2a_s x^{k+s} + \ldots$$

or $k+s > 2s$, car $k > s$; d'où $2a_s = 0$ i.e. $a_s = 0$ ce qui est une contradiction. Il ne nous reste donc que les polynômes x^k pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ et le polynôme $p(x) \equiv 0$.

Question 6

Etant donné des rangées A et B, appelons $A + B$ la rangée C dont l'énoncé du problème affirme l'existence.

On établit aisément les deux propriétés suivantes:

(1) la somme de deux rangées est de poids pair si et seulement si ces deux rangées sont de même parité.

(2) soit C une rangée quelconque, si A et B sont deux rangées distinctes, alors les rangées $A + C$ et $B + C$ sont distinctes.

En effet, supposons que A ait n cases non-vides et B, m cases non-vides. Si A et B ont i cases non-vides en positions correspondantes, alors $A + B$ ont $n + m - 2i$ cases non-vides. Donc le poids de $A + B$ est de même parité que $n + m$. Notez que $A + A$ donne la rangée nulle. De plus, il est clair que si A et B diffèrent en position i, alors $A + C$ et $B + C$ diffèrent en position i.

Grâce aux propriétés (1) et (2), il est facile de répondre à la question (1^{o}). S'il n'y a pas de rangée de poids impair, alors il y en a 8 de poids pair. Sinon, il y au moins une rangée de poids impair. Soient alors $A_1, A_2, \ldots, A_r$ les rangées de poids pairs et $B_1, \ldots, B_s$ les rangées de poids impairs. On a $r \geq 1$, $s \geq 1$ et $r + s = 8$. D'après les propriétés (1) et (2), les rangées $A_1 + B_1$, $A_2 + B_1$, $\ldots$, $A_r + B_1$ sont distinctes et de poids impairs; donc $r \leq s$. De même, les rangées $B_1 + B_1$, $B_2 + B_1$, $\ldots$, $B_s + B_1$ sont distinctes et de poids pairs. Donc $s \leq r$. D'où $r = s = 4$.

Question 6 (suite)

Pour la question (2^o), le raisonnement est semblable. Supposons par exemple que la première colonne contienne au moins un pion. Soient alors $A_1, A_2, \ldots, A_r$ les rangées dont la première case est vide, et $B_1, B_2, \ldots, B_s$ les rangées dont la première case contient un pion. En raisonnant comme dans la première partie, on voit que $A_1 + B_1, A_2 + B_1, \ldots, A_r + B_1$ sont des rangées commençant par un pion, d'où $r \leq s$; de même $B_1 + B_1, B_2 + B_1, \ldots, B_s + B_1$ sont des rangées commençant par une case vide, d'où $s \leq r$. Donc $r = s = 4$. Ainsi, la première colonne, si elle n'est pas vide, contient exactement 4 pions. Le même raisonnement s'applique aux autres colonnes et ainsi toutes les colonnes ont le poids 4 ou 0. Le nombre total de pions est donc un multiple de 4.

> L'auteur est celui qui refuse de répéter, et garde le silence jusqu'au moment où il peut réinventer.
>
> Edmond Gilliard