COIN DU PROBLEME

RECHERCHE 19.2

Polynôme du 5^e degré:

par un groupe d'étudiants du
Lycée Blaise Pascal, Tours

sous la direction de
monsieur Marcel Dumont

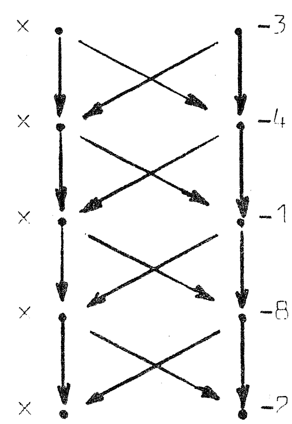
Soit le polynôme en x (où x représente un nombre):

$$(x-3)(x-4)(x-1)(x-8)(x-2).$$

(Il s'annule pour les racines 3, 4, 1, 8, 2.)

Développer ce polynôme, c'est multiplier chaque terme de chaque facteur par chaque terme de chaque facteur.

Ceci revient à la figure 1.



Sur la figure 1, on doit suivre tous les chemins de haut en bas.

On regroupe tous les chemins qui passent par quatre x, puis par trois x, etc.

Ce qui revient à grouper les termes en x^4, puis les termes en x^3, etc.

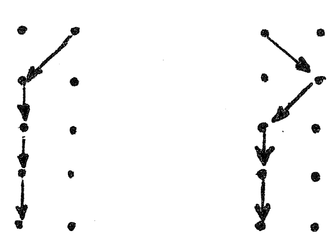
Attention! Le signe sera positif lorsque l'exposant sera impair et il sera négatif quand l'exposant sera pair.

- Pour x^5 : Produit de toutes les variables soit:

$$x \times x \times x \times x \times x = x^5$$

- Pour x^4, on obtient

I.	$3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 3x^4$
II.	$x \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x = 4x^4$
III.	$x \cdot x \cdot 1 \cdot x \cdot x = x^4$
IV.	$x \cdot x \cdot x \cdot 8 \cdot x = 8x^4$
V.	$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 2 = 2x^4$
soit	$18x^4$



Soit la somme des racines

- Pour x^3,

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x &= 12x^3\\
3 \cdot x \cdot 1 \cdot x \cdot x &= 3x^3\\
3 \cdot x \cdot x \cdot 8 \cdot x &= 24x^3\\
3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 2 &= 6x^3\\
x \cdot 4 \cdot 1 \cdot x \cdot x &= 4x^3\\
x \cdot 4 \cdot x \cdot 8 \cdot x &= 32x^3\\
x \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot 2 &= 8x^3\\
x \cdot x \cdot 1 \cdot 8 \cdot x &= 8x^3\\
x \cdot x \cdot 1 \cdot x \cdot 2 &= 2x^3\\
x \cdot x \cdot x \cdot 8 \cdot 2 &= \underline{16x^3}\\
\text{soit} \quad & 115x^3
\end{aligned}$$

Soit la somme des produits des racines 2 à 2.

- Pour x^2,

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot x \cdot x &= 12x^2\\
3 \cdot 4 \cdot x \cdot 8 \cdot x &= 96x^2\\
3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot 2 &= 24x^2\\
3 \cdot x \cdot 1 \cdot 8 \cdot x &= 24x^2\\
3 \cdot x \cdot 1 \cdot x \cdot 2 &= 6x^2\\
3 \cdot x \cdot x \cdot 8 \cdot 2 &= 48x^2\\
x \cdot 4 \cdot 1 \cdot x \cdot 2 &= 8x^2\\
x \cdot 4 \cdot 1 \cdot 8 \cdot x &= 32x^2\\
x \cdot 4 \cdot x \cdot 8 \cdot 2 &= 64x^2\\
x \cdot x \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2 &= \underline{16x^2}\\
\text{soit} \quad & 330x^2
\end{aligned}$$

Soit la somme des produits des racines 3 à 3.

- Pour x,

$$\begin{aligned}
\text{I.} \quad 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 8 \cdot x &= 96x\\
\text{II.} \quad 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot x \cdot 2 &= 24x\\
\text{III.} \quad 3 \cdot 4 \cdot x \cdot 8 \cdot 2 &= 192x\\
\text{IV.} \quad 3 \cdot x \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2 &= 48x\\
\text{V.} \quad x \cdot 4 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2 &= \underline{64x}\\
\text{soit} \quad & 424x
\end{aligned}$$

Soit la somme des produits des racines 4 à 4.

- Produit de toutes les racines

$3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2 = 192.$

Soit la somme des produits des racines 5 à 5.

Remarque: Il n'y a qu'un seul produit possible.

Résultat du polynôme

$$(x-3)(x-4)(x-1)(x-8)(x-2) = x^5 - 18x^4 + 115x^3 - 330x^2 + 424x - 192.$$