PROPRIETE DES SOMMATIONS D'IRRATIONNELS

par Marco Bélanger

Nous verrons dans le présent article une propriété concernant les sommations d'irrationnels. Certaines sommes de racines carrées de nombres entiers, comprises entre deux bornes, tendent vers un nombre rationnel. Et nous démontrerons cette propriété à l'aide de la formule d'Euler-Maclaurin.

Définition: [k] représente le plus grand entier inférieur ou égal à k.

Soit p^2 et $(p+1)^2$ deux carrés parfaits consécutifs et n, $n+1$, $n+2$, ... les nombres entiers entre ces deux carrés. Ces termes en fonction de n sont au nombre de:

$$(p+1)^2 - p^2 - 1 = 2p.$$

Considérons la somme des racines carrées de ces termes: on a

on a $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \ldots + \sqrt{(p+1)^2 - 1} = \sqrt{p^2+1} + \sqrt{p^2+2} + \ldots + \sqrt{p^2+2p}$

et soit $S = \sqrt{p^2+1} + \sqrt{p^2+2} + \ldots + \sqrt{p^2+2p}$.

En effectuant la somme numérique de chaque terme pour quelques sommations S, on remarque que

$$[S] = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2p = \frac{2p}{2}(2p+1) = p(2p+1).$$

En d'autres mots, [S] est la somme des nombres que l'on retrouve additionnés à p^2 sous le radical de chaque terme de S. La démonstration est faite plus loin.

Ainsi [S] suit la loi de la progression arithmétique, mais nous pouvons remarquer une autre propriété, si on observe la partie décimale des sommations numériques de S:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3.146243\ldots$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} = 10.159763\ldots$$

$$\sqrt{10} + \sqrt{11} + \ldots + \sqrt{15} = 21.163195\ldots$$

...

$$\sqrt{82} + \sqrt{83} + \ldots + \sqrt{99} = 171.16615\ldots$$

...

$$\sqrt{145} + \sqrt{146} + \ldots + \sqrt{168} = 300.16632\ldots$$

Curieusement, on remarque une certaine périodicité des chiffres un et six dans les premières décimales de ces sommes.

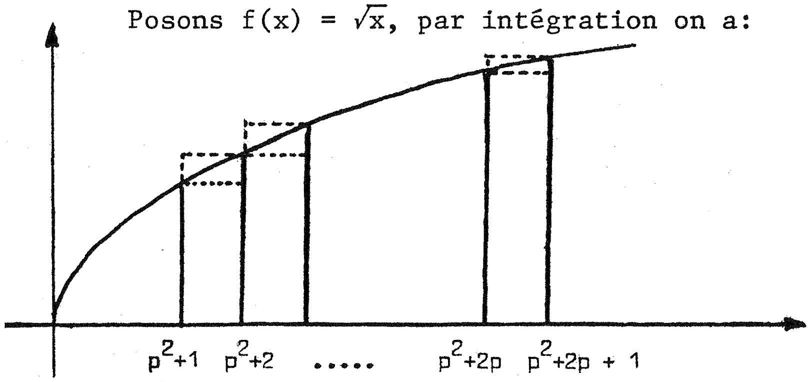
En posant $\lim\limits_{p\to\infty} (\sqrt{p^2+1} + \sqrt{p^2+2} + \ldots + \sqrt{p^2+2p} - (2p^2+p)) = L$,

pourrait-on croire que $L = \frac{1}{6} = 0{,}1\underline{6666}\ldots$? Oui, c'est en effet le cas et nous aurons l'occasion de le prouver dans les pages qui suivent.

Ainsi, la somme des racines carrées de nombres entiers entre deux carrés parfaits consécutifs tend vers un nombre rationnel de la forme $2p^2 + p + \frac{1}{6}$; propriété intéressante il va sans dire, que l'on peut qualifier d'esthétique, sans pour autant tomber dans le mysticisme des pythagoriciens.

Démontrons que la partie entière de S vaut $2p^2 + p$, c'est-à-dire $[S] = 2p^2 + p$.

Posons $f(x) = \sqrt{x}$, par intégration on a:



$$\sqrt{p^2+1} + \sqrt{p^2+2} + \ldots + \sqrt{p^2+2p} \le \int_{p^2+1}^{p^2+2p+1} \sqrt{x}\,dx \le \sqrt{p^2+2} + \sqrt{p^2+3} + \ldots + \sqrt{p^2+2p+1}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{p^2+1} + \sqrt{p^2+2} + \ldots + \sqrt{p^2+2p} \le \frac{2}{3}(p+1)^3 - \frac{2}{3}(p^2+1)^{\frac{3}{2}} .$$

Montrons que $2p^2 + p < \frac{2}{3}(p+1)^3 - \frac{2}{3}(p^2+1)^{\frac{3}{2}} < 2p^2 + p + 1$.

On a $(p^2+1)^{\frac{3}{2}} = p^3 + \frac{3}{2}p + \varepsilon(p)$, $\quad 0 < \varepsilon(p) < 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$.

tel que $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon(p) = 0$

$$\text{d'où } \frac{2}{3}(p+1)^3 - \frac{2}{3}(p\ \ +1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(p+1)^3 - \frac{2}{3}(p^3 + \frac{3}{2}p + \varepsilon(p))$$

$$= \frac{2}{3}(p^3 + 3p^2 + 3p + 1) - \frac{2}{3}p^3 - p - \frac{2}{3}\varepsilon(p)$$

$$= 2p^2 + p + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon(p) .$$

$\Rightarrow \quad 2p^2 + p < 2p^2 + p + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon(p) < 2p^2 + p + 1$, puisque $0 < \varepsilon(p) < 1$,

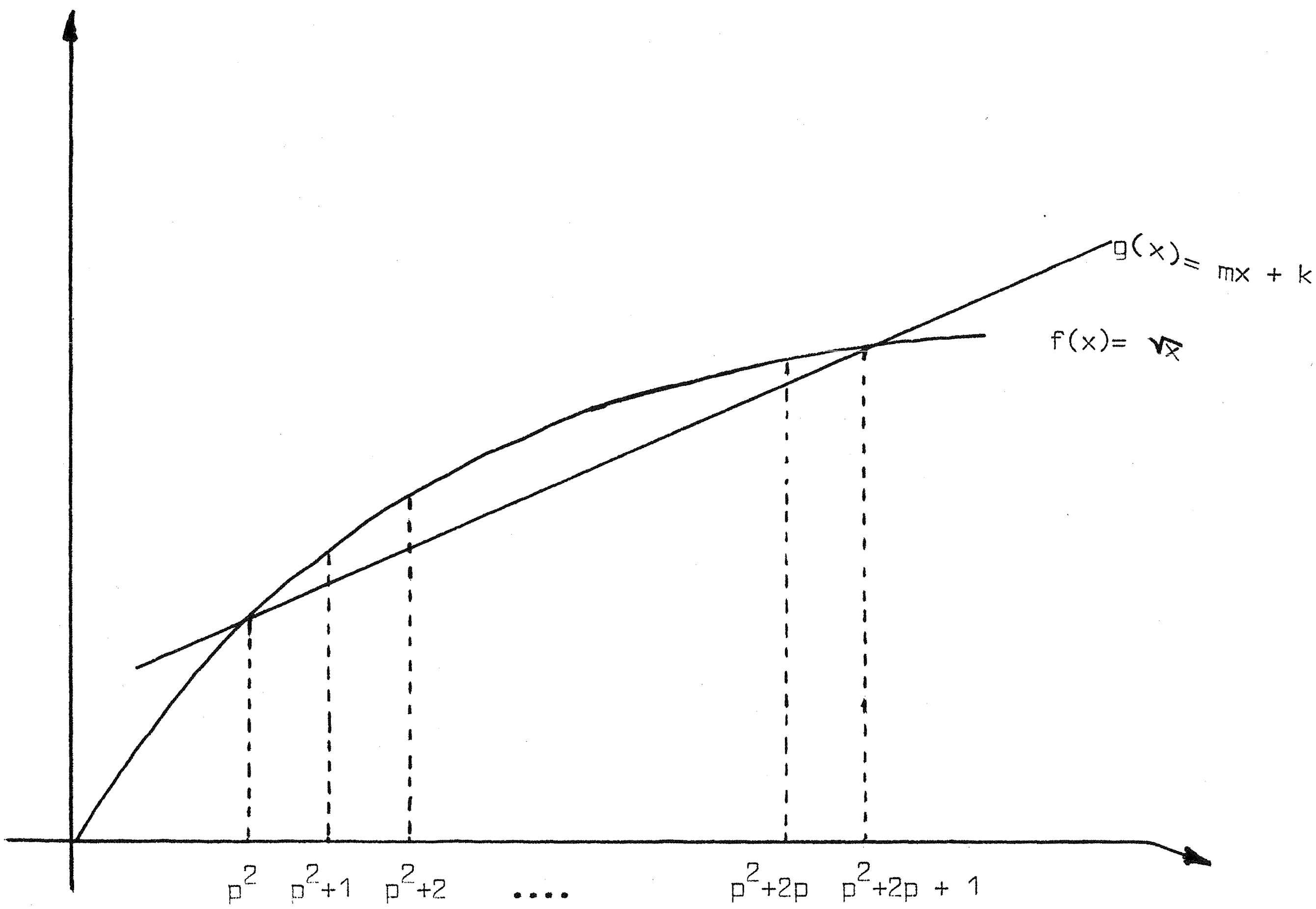
d'où $\quad 2p^2 + p < \frac{2}{3}(p+1)^3 - \frac{2}{3}(p^2+1)^{\frac{3}{2}} < 2p^2 + p + 1$, cela montre que $\displaystyle\sum_{n=p^2+1}^{p^2+2p} \sqrt{n} < 2p^2 + p + 1.$

Or on sait qu'il existe 2p termes entre deux carrés parfaits consécutifs et leur valeur respective se situe entre p^2 et $(p+1)^2$. Par conséquent, la somme S de ces termes est entre $2p(p)$ et $2p(p+1)$. Il s'agit donc de prouver que S est supérieur à la moyenne de $2p^2$ et $2p(p+1)$, i.e. $2p^2 + p$.

Pour ce faire, utilisons le théorème suivant qui, d'ailleurs, se démontre aisément.

Si une droite d'équation $g(x) = mx + k$, où $x \in \mathbb{R}$ et $k \geq 0$, alors $g(b+1) + g(b+2) + \ldots + g(b+n) = \frac{n}{2}(g(b) + g(b+n+1))$.

Si on pose $b = p^2$ et $n = 2p$ tel qu'une droite $g(x)$ coupe $f(x) = \sqrt{x}$ aux points (p^2,p) et $((p+1)^2,p+1)$, on a graphiquement:



On a $S = f(p^2+1) + f(p^2+2) + \ldots + f(p^2+2p) > g(p^2+1) + g(p^2+2) + \ldots + g(p^2+2p)$

car $f(x) > g(x) \quad \forall x \in]p^2,(p+1)^2[$.

Par contre $\frac{2p}{2}(f(p^2) + f(p^2+2p+1)) = \frac{2p}{2}(g(p^2) + g(p^2+2p+1))$

d'où $\qquad S > p(f(p^2) + f(p^2+2p+1))$

$\qquad S > 2p^2 + p$

donc $$2p^2 + p < \sum_{p^2+1}^{p^2+2p} \sqrt{n} < 2p^2 + p + 1$$

par conséquent $[S] = 2p^2 + p$ et L existe.

Maintenant démontrons que $L = \frac{1}{6}$ au moyen de la formule d'Euler-Maclaurin. Le procédé consiste à borner la limite $\lim\limits_{p\to\infty} \left(\sum\limits_{p^2+1}^{p^2+2p} \sqrt{n} - (2p^2+p+\frac{1}{6})\right)$ entre 0 et une limite facilement calculable.

Lorsque f admet une dérivée seconde continue sur un intervalle $[a,b]$, on peut alors comparer l'intégrale de f avec la règle du trapèze:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left(\frac{f(b)+f(a)}{2}\right) - \int_a^b f''(x)\frac{(x-a)(b-x)}{2}\,dx \;.$$

Si f est concave vers le bas $\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2} \le 0\right)$, on a après quelques transformations:

$$\frac{1}{8}\int_a^b f''(x)dx \le (b-a)\,\frac{f(b)+f(a)}{2} - \int_a^b f(x)dx \le 0$$

$$\frac{1}{8}\,(f'(b)-f'(a)) \le (b-a)\,\frac{f(b)+f(a)}{2} - \int_a^b f(x)dx \le 0.$$

Si $a = M$ et $b = N$ sont deux entiers, $0 \le M < N$, on peut poser:

$$\frac{1}{8}\,(f'(N)-f'(M)) \le \left(\frac{1}{2}\,f(M) + \sum_{n=M+1}^{N-1} f(n) + \frac{1}{2}\,f(N) - \int_M^N f(x)dx\right) \le 0.$$

Si l'on prend $f(x) = \sqrt{x}$

où $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, ce qui est conforme aux conditions précédentes

et posons $M = p^2$, $N = (p+1)^2$.

On en sait que $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{8}(f'(p^2+2p+1) - f'(p^2)) = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{8}(\frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{2p})$

$= 0$

d'où $\lim\limits_{p\to\infty} (\frac{1}{2}p + \sum\limits_{p^2+1}^{p^2+2p} \sqrt{n} + \frac{1}{2}(p+1) - \frac{2}{3}((p+1)^3 - p^3)) = 0$

$$\lim_{p\to\infty} (\sum_{p^2+1}^{p^2+2p} \sqrt{n} - 2p^2 - p - \frac{1}{6}) = 0$$

Ce qui démontre la valeur de L.

Donc une certaine somme de termes irrationnels, comprise entre deux bornes, tend vers un rationnel. Voilà une propriété que les mathématiciens de la Grèce Antique auraient fort appréciée de leur temps. Peut-être que Pythagore aurait déclaré, par la voie de son mysticisme: "Vous voyez, c'est encore le nombre rationnel qui domine, même s'il existe des irrationnels!"

Cette propriété fascinante nous laisse entrevoir une conséquence, à savoir que les premières décimales des racines carrées de la somme S obéissent à un ordre particulier, puisque leur somme, à partir d'un $p > P$ ($P \in \mathbb{N}^*$), doit donner la quantité $2p^2 + p + 0.166\ldots$ (le chiffre six n'étant pas périodique).

Pour le cas des racines cubiques, quatrièmes et autres, les irrationnels, entre deux puissances parfaites consécutives, tendent eux aussi vers un rationnel. On peut facilement montrer, avec la formule d'Euler-Maclaurin, que si

$$L_i = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=p^i+1}^{(p+1)^i-1} n^{\frac{1}{i}} - Q_i(p) \right) \quad \text{où} \quad i \in \{2,3,4,\ldots\}$$

$Q_i(p)$ un polynôme de degré i

alors $L_i = \frac{i}{i+1} - \frac{1}{2}$. Ainsi, on note que lorsque i tend vers l'infini, L_i atteint la valeur $\frac{1}{2}$.

En bref, non seulement la partie entière de la somme S_i obéit à une règle (progression arithmétique pour i = 2), mais la partie décimale obéit à une loi (en ce qui concerne les premières décimales).