UNE MÉTHODE POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES DE POINTS ET DE DROITES DANS $\mathbb{R}^2$ AU MOYEN DU PRODUIT VECTORIEL DANS $\mathbb{R}^3$

par François Trottier
Département de mathématiques
Collège Jean de Brébeuf

INTRODUCTION

A) Voici une description des 3 genres de problèmes qui y seront traités:

PROBLÈME I : Déterminer la position relative de 2 droites dans $\mathbb{R}^2$ en connaissant une équation linéaire pour chacune de celle-ci.

PROBLÈME II : Déterminer une équation linéaire d'une droite de $\mathbb{R}^2$ en connaissant 2 points de celle-ci.

PROBLÈME III: Déterminer une équation linéaire d'une droite de $\mathbb{R}^2$ en connaissant un point et un vecteur directeur de celle-ci.

B) Trois objectifs sont visés

I - Décrire une MÉTHODE MÉCANIQUE, courte à appliquer, qui est essentiellement la même pour les 3 genres de problèmes.

II - DONNER UNE JUSTIFICATION GÉOMÉTRIQUE À NOTRE MÉTHODE, c'est-à-dire montrer que si l'on considère le plan $\mathbb{R}^2$ comme étant un plan particulier de l'espace $\mathbb{R}^3$, alors certains problèmes d'incidences et d'intersections concernant les points et les droites de $\mathbb{R}^2$ se traduisent respectivement en problèmes d'incidences et d'intersections de droites et de plans, passant par l'origine, de l'espace $\mathbb{R}^3$. Ces derniers peuvent facilement être résolus au moyen du PRODUIT VECTORIEL.

III- Constater que notre solution géométrique nous fournit une INTERPRÉTATION VISUELLE de la RÈGLE DE CRAMER; celle-ci nous étant ordinairement présentée d'une façon froide et équationnelle.

C) La marche à suivre sera la suivante:

On fera brièvement quelques rappels et notations; ensuite on exposera pour chacun des 3 genres de problèmes:

- une description de la "méthode mécanique"
- une application de celle-ci à certains exemples
- une illustration et une idée intuitive pour la justification de cette "méthode"
- la théorie de cette méthode
- quelques commentaires
- à la toute fin, on fera une généralisation.

RAPPELS ET NOTATIONS

1) Toute équation de la forme: $ax + by + c = 0$, $(a,b) \neq (0,0)$ désignera la droite d de $\mathbb{R}^2$ où $d = \{(x,y) \mid ax + by + c = 0\}$.

2) Toute équation de la forme: $ax + by + cy = 0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ désignera le plan π passant par l'origine de $\mathbb{R}^3$ où $\pi = \{(x,y,z) \mid ax + by + cy = 0\}$.

3) Un vecteur d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (x,y) sera noté $\overrightarrow{(x,y)}$ de même qu'un vecteur d'origine $(0,0,0)$ et d'extrémité (x,y,z) sera noté $\overrightarrow{(x,y,z)}$.

4) $$\overrightarrow{(a,b,c)} \times \overrightarrow{(d,e,f)} = \overrightarrow{\left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right)}$$
$$= \overrightarrow{(bf - ec,\ dc - af,\ ae - db)}$$
$= $ le produit vectoriel de $\overrightarrow{(a,b,c)}$ par $\overrightarrow{(d,e,f)}$.

5) $d[A,B]$ dénote la droite passant par A et B

$d[A,\vec{B}]$ dénote la droite passant par A et ayant $\vec{B}$ pour vecteur directeur

$d[\pi_1,\pi_2]$ dénote la droite résultant de l'intersection des plans π_1 et π_2

$\pi[d,A]$ dénote le plan contenant le point A et la droite d

$\pi[A,B,C]$ dénote le plan contenant les points A, B et C

$\pi[A,B,\vec{C}]$ dénote le plan contenant les points A et B ayant $\vec{C}$ pour vecteur directeur

$\pi[A,\vec{B},\vec{C}]$ dénote le plan contenant le point A ayant $\vec{B}$ et $\vec{C}$ pour vecteur directeur.

PROBLÈME I

Voici la "DÉMARCHE MÉCANIQUE" pour déterminer la position relative des droites "$a_1x + b_1y + c_1 = 0$" et "$a_2x + b_2y + c_2 = 0$".

On effectue le produit vectoriel de $\overrightarrow{(a_1, b_1, c_1)}$ par $\overrightarrow{(a_2, b_2, c_2)}$; on obtient $\overrightarrow{(b_1c_2 - c_1b_2, c_1a_2 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2)}$, qu'on note $\overrightarrow{(a_3, b_3, c_3)}$.

Alors on peut conclure que:

1. les droites sont identiques $\iff a_3 = b_3 = c_3 = 0$
2. les droites sont distinctes, parallèles et ont $\overrightarrow{(a_3, b_3)}$ comme vecteur directeur $\iff c_3 = 0$ et $(a_3, b_3) \neq (0,0)$
3. les droites sont sécantes au point $(\frac{a_3}{c_3}, \frac{b_3}{c_3}) \iff c_3 \neq 0$.

Exemples

Déterminer pour chacun des systèmes d'équations (a), (b) et (c) la position relative des droites en question.

(a) {"$2x + 2y - 4 = 0$", "$2x + y - 1 = 0$"}

Solution: Comme $\overrightarrow{(2,2,-4)} \times \overrightarrow{(2,1,-1)} = \overrightarrow{(2,-6,-2)}$, les 2 droites sont sécantes en $(\frac{2}{-2}, \frac{-6}{-2})$.

Voir 3.

(b) {"$2x - 3y + 1 = 0$", "$4x - 6y - 5 = 0$"}

Solution: Comme $\overrightarrow{(2,-3,1)} \times \overrightarrow{(4,-6,-5)} = \overrightarrow{(21,14,0)}$, les droites sont distinctes, parallèles et $\overrightarrow{(21,14)}$ est vecteur directeur commun.

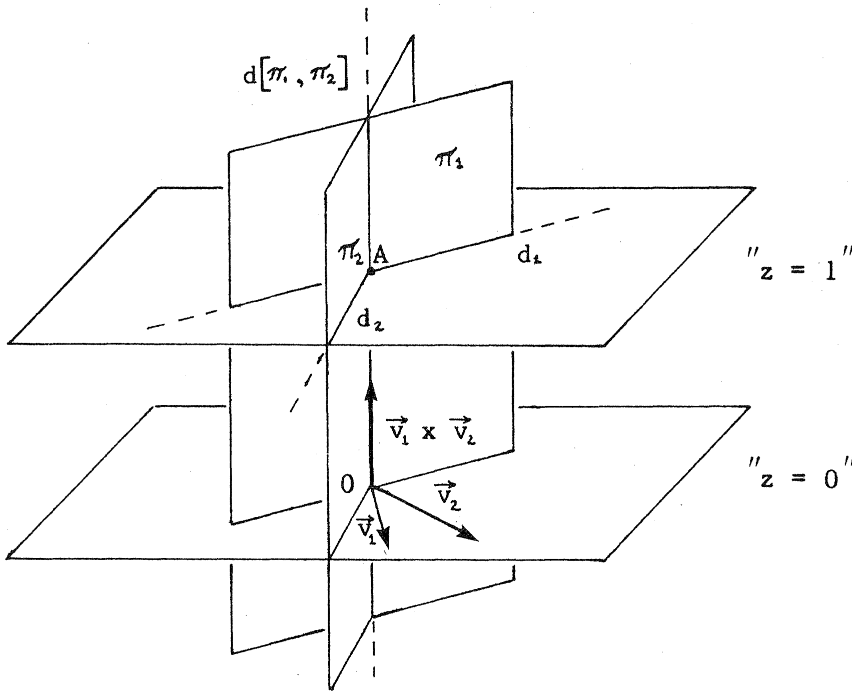
Voir 2.

(c) {"$2x - 5y + 7 = 0$", "$-4x + 10y - 14 = 0$"}

Solution: Comme $\overrightarrow{(2,-5,7)} \times \overrightarrow{(-4,10,-14)} = \overrightarrow{(0,0,0)}$, les droites sont identiques.

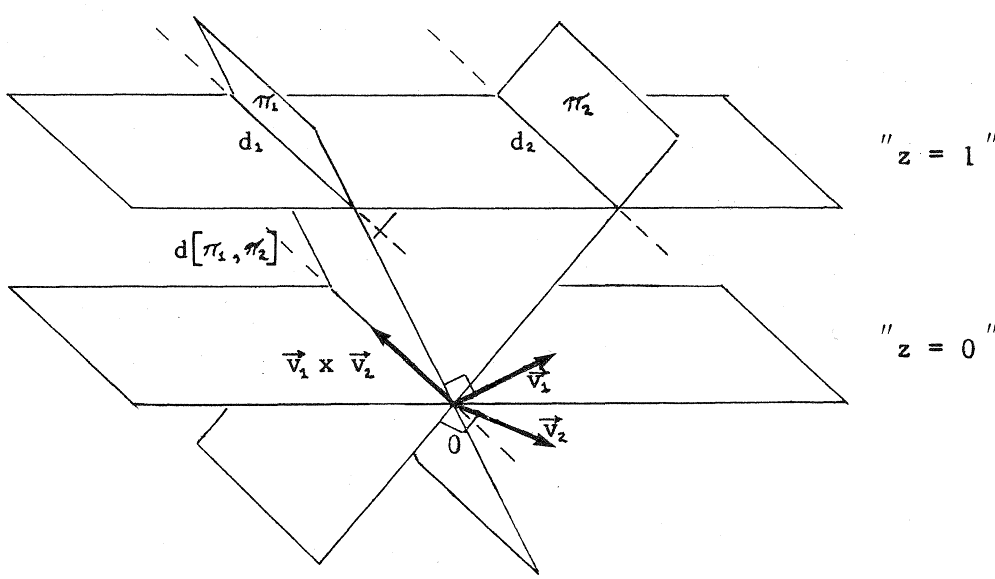
Voir 1.

FIG. 1



$d[\pi_1, \pi_2]$
π_1
π_2
A
d_1
d_2
"z = 1"
$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
0
$\vec{v}_2$
$\vec{v}_1$
"z = 0"

FIG. 2



π_1
π_2
d_1
d_2
"z = 1"
$d[\pi_1, \pi_2]$
$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
0
"z = 0"

Idée intuitive et géométrique

On s'imagine que le plan $\mathbb{R}^2$ se confond avec le plan "$z = 1$" de $\mathbb{R}^3$ où $(x,y,1)$ est vu comme le point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ ayant 1 comme hauteur. Alors:

(1) déterminer le point A d'intersection des droites d_1 et d_2 revient à chercher l'intersection de la droite $d[\pi_1,\pi_2]$, où $\pi_1 = \pi[d_1,0]$ et $\pi_2 = \pi[d_2,0]$, avec le plan "$z = 1$".

Voir figure 1

(2) déterminer un vecteur directeur des 2 droites parallèles d_1 et d_2 revient à trouver le produit vectoriel de $\vec{v}_1$ par $\vec{v}_2$ où $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont respectivement des vecteurs normaux aux plans $\pi[d_1,0]$ et $\pi[d_2,0]$.

Voir figure 2

La théorie

I. Soit d_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et d_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ deux droites de $\mathbb{R}^2$; déterminer la position relative de ces droites.

Solution:

Nous identifions le plan $\mathbb{R}^2$ au plan d'équation "$z = 1$" dans $\mathbb{R}^3$ par la correspondance $(x,y) \mapsto (x,y,1)$.

Soit π_1 le plan contenant l'origine de $\mathbb{R}^3$ et la droite d_1 et soit π_2 le plan contenant l'origine de $\mathbb{R}^3$ et la droite d_2.

Il est alors facile de constater que l'équation $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ est une équation linéaire de π_1 et que l'équation $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ est une équation linéaire de π_2.

Soit $\vec{v}_1 = \overrightarrow{(a_1, b_1, c_1)}$ et $\vec{v}_2 = \overrightarrow{(a_2, b_2, c_2)}$ et posons $\vec{v}_3 = \overrightarrow{(a_3, b_3, c_3)} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ [voir Figures 1 et 2].

Si $\vec{v}_3 = \overrightarrow{(0,0,0)}$, alors $\pi_1 = \pi_2$ car $(0,0,0)$ est commun à π_1 et π_2.

On a aussi $d_1 = d_2$ car d_i est l'intersection de π_i avec le plan "$z = 1$" pour $i = 1,2$.

Supposons alors que $\vec{v}_3 \neq \overrightarrow{(0,0,0)}$, on a donc $\pi_1 \neq \pi_2$; de plus, on peut voir facilement que l'ensemble des points kv_3 où k varie dans $\mathbb{R}$ constitue la droite $d[\pi_1,\pi_2]$.

Une alternative se présente:

1) ou bien la droite $d[\pi_1,\pi_2]$ coupe le plan "z = 1" au point $\frac{1}{c_3} v_3$ i.e. $(\frac{a_3}{c_3}, \frac{b_3}{c_3}, 1)$ qui coïncide avec le point d'intersection de d_1 et d_2

   Figure 1

2) ou bien la droite $d[\pi_1,\pi_2]$ ne coupe pas le plan "z = 1", dans ce dernier cas on doit avoir $d[\pi_1,\pi_2]$ parallèle à d_1 et parallèle à d_2 et de plus, $c_3 = 0$, d'où $\overrightarrow{(a_3,\ b_3,\ 0)}$ est un vecteur directeur de d_1 et de d_2.

   Figure 2

En retraduisant dans $\mathbb{R}^2$, le premier cas signifie que $(\frac{a_3}{c_3}, \frac{b_3}{c_3})$ est l'intersection de d_1 et d_2 et le deuxième cas signifie que d_1 est parallèle à d_2 et que $\overrightarrow{(a_3,\ b_3)}$ est un vecteur directeur de d_1 et d_2.

Commentaire

Tout le travail qu'on vient d'effectuer n'est en fait qu'une interprétation géométrique de la règle de Cramer. En effet, le problème revenait à résoudre le système d'équations: $a_1x + b_1y = -c_1$ et $a_2x + b_2y = -c_2$;

$$\text{or } \vec{v}_3 = \overrightarrow{(a_3,\ b_3,\ c_3)} = \overrightarrow{\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)}$$

$$= \overrightarrow{\left(\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)}.$$

Lorsque $c_3 \neq 0$, la règle de Cramer nous dit que la solution est unique et elle nous est donnée par $(\frac{a_3}{c_3}, \frac{b_3}{c_3})$.

Lorsque $a_3 = b_3 = c_3 = 0$, on a une infinité de solutions (dans le problème $d_1 = d_2$) et lorsque $c_3 = 0$ et $(a_3,\ b_3) \neq (0,0)$, on n'a aucune solution (dans le problème $d_1 \neq d_2$ et $d_1 \parallel d_2$).

Problème II

> Voici la "DÉMARCHE MÉCANIQUE" pour déterminer une équation linéaire de la droite qui passe par (a_1, b_1) et (a_2, b_2).

On effectue le produit vectoriel de $\overrightarrow{(a_1, b_1, 1)}$ par $\overrightarrow{(a_2, b_2, 1)}$; on obtient $\overrightarrow{(b_1 - b_2, a_2 - a_1, a_1b_2 - a_2b_1)}$ qu'on note $\overrightarrow{(a_3, b_3, c_3)}$.
On peut alors conclure que $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ est une équation désirée.

Exemple

Déterminer une équation linéaire de la droite passant par (2,3) et (-4,5).

Solution: Comme $\overrightarrow{(2,3,1)} \times \overrightarrow{(-4,5,1)} = \overrightarrow{(-2,-6,22)}$, alors $-2x - 6y + 22 = 0$ est une équation linéaire de cette droite.

Problème III

> Voici la "DÉMARCHE MÉCANIQUE" pour déterminer une équation linéaire de la droite qui passe par (a_1, b_1) et dont $\overrightarrow{(a_2, b_2)}$ est un des vecteurs directeurs.

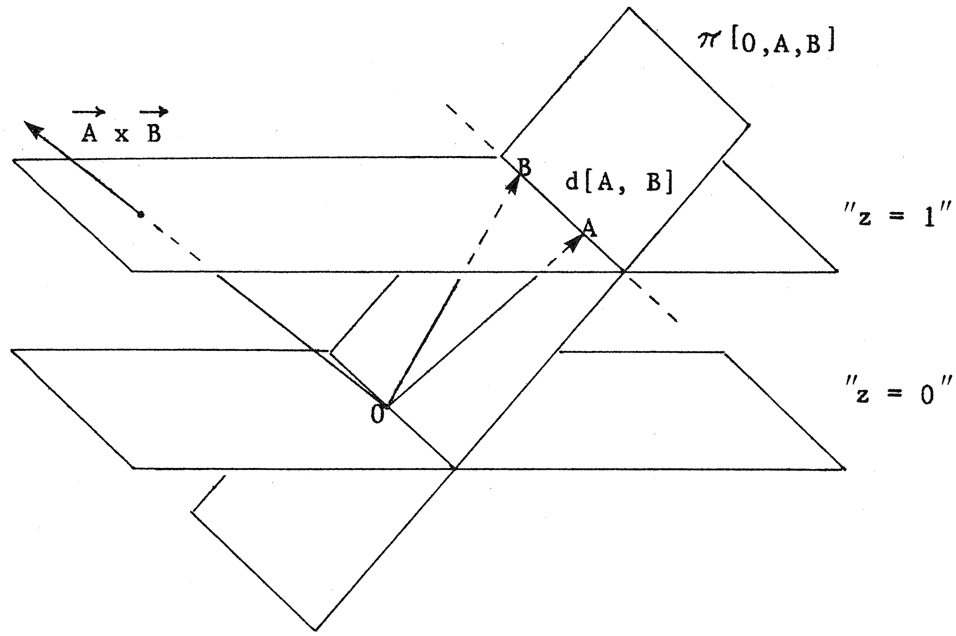
On effectue le produit vectoriel de $\overrightarrow{(a_1, b_1, 1)}$ par $\overrightarrow{(a_2, b_2, 0)}$; on obtient $\overrightarrow{(-b_2, a_2, a_1b_2 - a_2b_1)}$ qu'on note $\overrightarrow{(a_3, b_3, c_3)}$. On peut alors conclure que $a_3x + b_3y + c_3z = 0$ est une équation désirée.

Exemple

Soit (2,3) et $\overrightarrow{(-4,5)}$, respectivement un point et un vecteur directeur d'une droite; déterminer une équation linéaire de celle-ci.

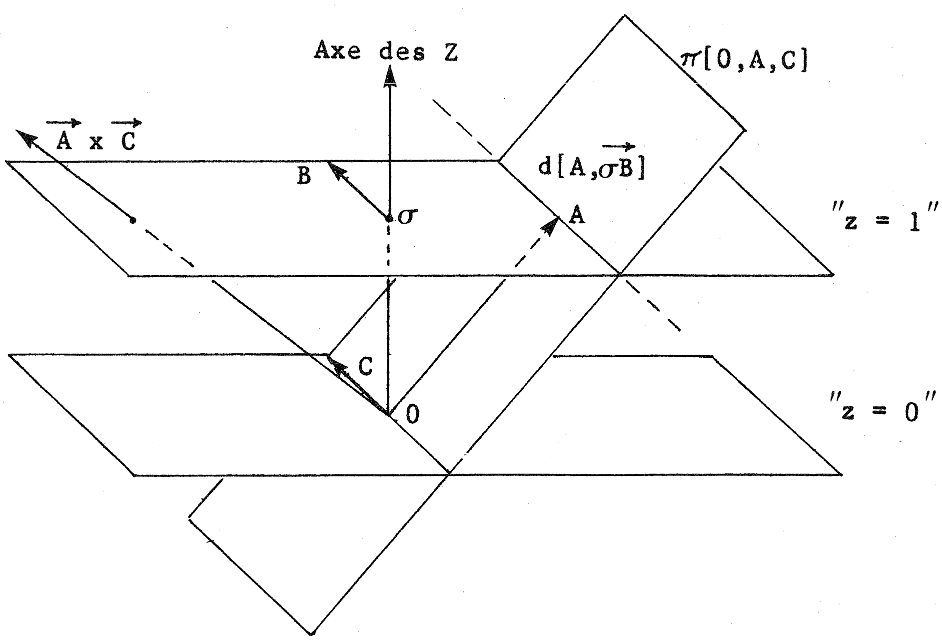
Solution: Comme $\overrightarrow{(2,3,1)} \times \overrightarrow{(-4,5,0)} = \overrightarrow{(-5,-4,22)}$, alors $-5x - 4y + 22 = 0$ est une équation linéaire de cette droite.

FIG. 3



π [0,A,B]
$\vec{A} \times \vec{B}$
B
d[A, B]
A
"z = 1"
"z = 0"
0

FIG. 4



Axe des Z
π[0,A,C]
$\vec{A} \times \vec{C}$
B
σ
d[A,$\overrightarrow{\sigma B}$]
A
"z = 1"
C
0
"z = 0"

Idée intuitive et géométrique

On imagine que le plan $\mathbb{R}^2$ se confond avec le plan "$z = 1$" de $\mathbb{R}^3$ où $(x,y,1)$ est vu comme le point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ ayant 1 comme hauteur.

Alors

(1) chercher une équation de la droite $d[A,B]$ dans $\mathbb{R}^2$ revient à chercher une équation du plan $\pi[0,A,B]$ en plus de l'équation "$z = 1$"; ceci car la droite $d[A,B]$ est l'intersection des plans $\pi[0,A,B]$ et "$z = 1$". (voir figure 3)

(2) chercher une équation de la droite $d[A,\overrightarrow{\sigma B}]$ de $\mathbb{R}^2$ revient à chercher une équation du plan $\pi[0,A,C]$ en plus de l'équation "$z = 1$" où $\vec{C}$ est équipollent à $\overrightarrow{\sigma B}$; ceci car la droite $d[A,\overrightarrow{\sigma B}]$ de $\mathbb{R}^2$ est l'intersection des plans $\pi[0,A,C]$ et "$z = 1$". (voir figure 4)

Théorie

II. Soit d la droite passant par A et B où $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$; nous cherchons une équation linéaire de d. [Fig. 3]

Solution:

Nous identifions le plan $\mathbb{R}^2$ avec le plan "$z = 1$" de $\mathbb{R}^3$ par la correspondance $(x,y) \mapsto (x,y,1)$.

Soit π le plan contenant $(a_1, b_1, 1)$, $(a_2, b_2, 1)$ et $(0,0,0)$, alors une équation de π est "$a_3x + b_3y + c_3z = 0$" où $\overrightarrow{(a_3, b_3, c_3)} = \overrightarrow{(a_1, a_2, 1)} \times \overrightarrow{(b_1, b_2, 1)}$; et comme d est l'intersection du plan π avec le plan "$z = 1$", il s'ensuit que "$a_3x + b_3y + c_3 = 0$" est une équation linéaire de d.

III. Soit d la droite passant par A et dont $\vec{B}$ est un vecteur directeur, où $A = (a_1, a_2)$ et $\vec{B} = \overrightarrow{(b_1, b_2)}$; nous cherchons une équation linéaire de d. [Fig. 4]

Solution:

Nous identifions le plan $\mathbb{R}^2$ avec le plan "$z = 1$" de $\mathbb{R}^3$ par la correspondance $(x,y) \to (x,y,1)$.

Soit π le plan contenant $(a_1, b_1, 1)$, $(a_2, b_2, 0)$ et $(0,0,0)$, alors une équation de π est "$a_3x + b_3y + c_3z = 0$" où $\overrightarrow{(a_3, b_3, c_3)} = \overrightarrow{(a_1, b_1, 1)} \times \overrightarrow{(a_2, b_2, 0)}$; et comme d est l'intersection du plan π avec le plan "$z = 1$", il s'ensuit que "$a_3x + b_3y + c_3 = 0$" est une équation linéaire de d.

Commentaires

Les problèmes II et III peuvent se simplifier de la façon suivante:

II) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ est une équation linéaire de $d[(a_1, b_1), (a_2, b_2)]$.

III) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ est une équation linéaire de $d[(a_1, b_1), \overrightarrow{(a_2, b_2)}]$.

UNE GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE:

(i) Soit π_i: "$a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$", $i = 1,2,3$ trois plans.

Notons (a_4, b_4, c_4, d_4) l'élément suivant de $\mathbb{R}^4$:

$$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$$

alors on peut conclure que:

les trois plans sont sécants au point $\left(\frac{a_4}{d_4}, \frac{b_4}{d_4}, \frac{c_4}{d_4}\right) \iff d_4 \neq 0$

(ii) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ est une équation linéaire du plan $\pi[(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)]$ si celui-ci existe.

(iii) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ est une équation linéaire du plan $\pi[(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \overrightarrow{(a_3, b_3, c_3)}]$ si celui-ci existe.

(iv) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ est une équation linéaire du plan $\pi[(a_1, b_1, c_1), \overrightarrow{(a_2, b_2, c_2)}, \overrightarrow{(a_3, b_3, c_3)}]$

Remarque:

Les résultats et les idées de ce travail sont des conséquences de l'analyse du plan [et de l'espace] projectif réel, muni d'un système de coordonnées homogènes.
Le lecteur désireux d'approfondir ces sujets pourra consulter les ouvrages de la bibliographie suivante:

. André Delachot: La Géométrie projective; coll. "Que sais-je?", no 1103

. Busemann, Kelly: Projective Geometry and Projective Metrics; AP.

. H.S.M. Coxeter: The real projective plane (Second edition), Cambridge University Press.