

Niveau collégial I et II

Question 1

Déterminez si les nombres suivants sont des carrés de nombres entiers. Justifiez votre réponse.

- a) 3195671765913
- b) 1234567654321
- c) 2483979248397.

Question 2

Considérez le polynôme suivant

$$x^2 + a(1 + b)x - ab$$

où $a, b > 0$. Si x_1 et x_2 dénotent les racines de ce polynôme, montrez que les valeurs absolues de x_1 et x_2 sont inférieures à 1 si et seulement si la condition suivante est satisfaite:

$$a < \frac{1}{1 + 2b}.$$

Question 3

On cherche trois (3) nombres positifs, x , y et z tels que

- (i) leur somme soit égale à 9,
et (ii) leur produit soit égal à 9.

- a) Y a-t-il une solution pour laquelle x , y et z soient des entiers?
b) Y a-t-il une solution pour laquelle x soit entier et y et z rationnels?
c) Y a-t-il une solution pour laquelle x , y et z soient rationnels?

Justifiez vos réponses.

N.B. Un nombre w est rationnel s'il peut être écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ où $q > 0$ et p et q sont des entiers.

Question 4

Considérons l'ensemble M des matrices de quatre (4) nombres

positifs $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a + b = 1$ et $c + d = 1$

(i.e. la somme des éléments d'une même ligne est égale à 1).

On définit l'opération (élever au carré) suivante:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix};$$

le résultat est encore un élément de M , appelé le carré de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(suite page suivante)

Question 4 (suite)

Considérons les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$; ce sont des

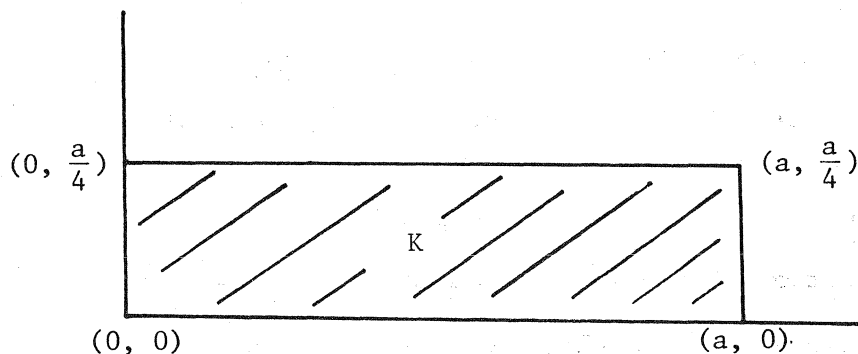
carrés d'éléments de M :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Peut-on écrire tout élément de M comme le carré d'un élément de M ? Justifiez votre réponse.

Question 5

Considérons le rectangle K suivant dans le plan.



Etant donné une fonction f du plan dans lui-même ayant les propriétés suivantes:

- (i) $f(K) \subseteq K$ (le rectangle est envoyé dans lui-même)
- (ii) $f(0, 0) = (0, 0)$
- (iii) $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ pour tous points P et Q du plan;

Montrez qu'on a alors $f(P) = P$ pour tout point P du plan.

N.B. $d(P, Q)$ est la longueur du rayon du cercle centré en P et passant par Q ou vice-versa.

Question 6

Considérons un quadrilatère contenu dans un cercle passant par ses quatre (4) sommets et contenant un cercle tangent à chacun de ses côtés. Montrez que les droites joignant les points de tangence des côtés opposés sont perpendiculaires.

