JACQUES LABELLE

1, 2, 4, 8, 16?

Nous vous proposons de résoudre deux problèmes de mathématique combinatoire.

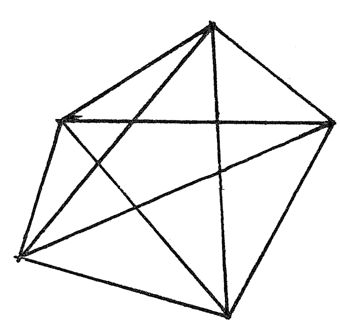
Problème 1.

Considérons un polygone convexe de n côtés (où n est un entier) et traçons-en toutes les diagonales possibles (voir figure 1). En supposant que jamais trois diagonales ne se coupent en un même point intérieur, en combien de régions le polygone est-il divisé? Dénotons-en ce nombre.

Figure 1:

$n = 5$

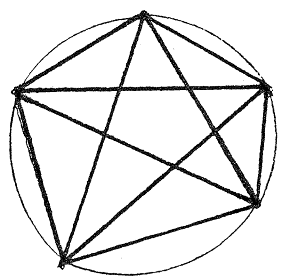
$a_5 = 11$



Problème 2

Considérons n points sur un cercle et traçons toutes les cordes possibles entre ces points (voir figure 2). En combien de régions le cercle est-il partagé? Dénotons b_n ce nombre.

Figure 2



$n = 5$

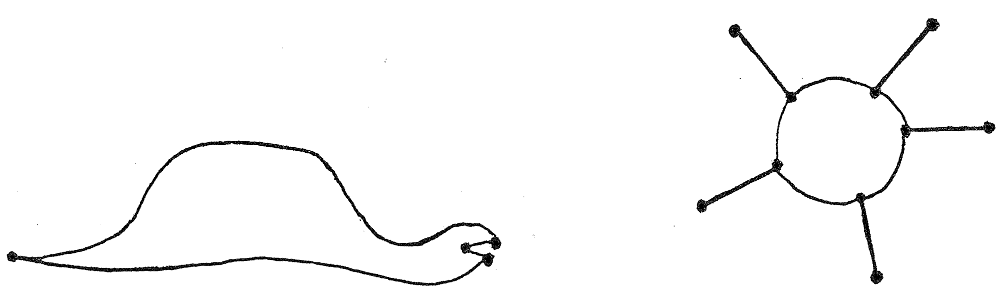
$b_5 = 16$

Dans le calcul de a_n, nous aurons besoin de la formule classique d'Euler.

Définition 1: Une figure est un sous-ensemble du plan formé d'un nombre fini de points (appelés les sommets) et d'un nombre fini de courbes entre certains sommets. (Voir figure 3).

Définition 2: Les régions du plan entourées par les courbes de la figure sont appelées faces de la figure.

Figure 3:



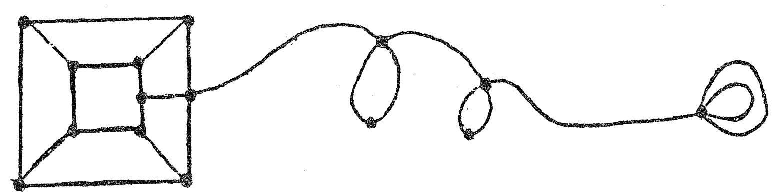
Une figure à 14 sommets, 14 courbes et 3 régions.

Remarque 1: N'oubliez pas la région infinie dite l'extérieur de la figure.

Remarque 2: En langage mathématique, les faces de la figure G, contenue dans le plan P, sont les composantes connexes (c'est-à-dire les morceaux) de l'ensemble P-G.

Défénition 3. Nous dirons que la figure est <u>connexe</u> si on peut la tracer sans jamais lever son crayon (i.e. elle n'est formée que d'un morceau).

Exemple 1:



Soit G une figure

Soit C = ensemble des courbes

Soit S = ensemble des sommets.

Soit F = ensemble des faces.

Posons # S = s, # C = c et # F = f où # veut dire nombre d'éléments.

Théorème d'Euler (1736)

Si G est une figure connexe alors $s - c + f = 2$

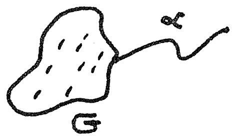
Preuve: C'est vrai pour une figure n'ayant qu'une courbe car il n'y a que deux cas:

$2 - 1 + 1 = 2$

et

$1 - 1 + 2 = 2$

Supposons la formule vraie pour une figure G ayant k courbes et soit α une (k + 1) ième courbe. Il y a 3 cas possibles:

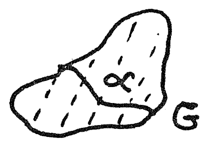
1) 

$, G' = G \cup \alpha,$ $\quad s' = s + 1 \quad$ et $s - c + f = 2$

$c' = c + 1$

$f' = f$

Donc $s' - c' + f' = (s + 1) - (c + 1) + f = 2$ aussi

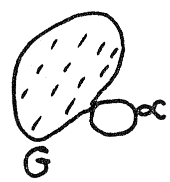
II) 

$s' = s$

$c' = c + 1$

$f' = f + 1$

et $s' - c' + f' = s - (c+1) + (f+1) = 2$

III) 

$s' = s$

$c' = c + 1$

$f' = f + 1$

et $s' - c' + f' = s - (c+1) + (f+1) = 2$

La formule est donc vraie quelque soit le nombre de courbes.

Remarque 3. Si la figure G a m morceaux alors $s - c + f = m + 1$. Pour la figure 3, on a $14 - 14 + 3 = 2 + 1$.

La preuve est facile, il suffit de relier les m morceaux entre eux en traçant $m - 1$ nouvelles courbes pour obtenir une figure G' qui est connexe. On a pour G', $s' - c' + f' = 2$ où $s' = s$, $c' = c + m - 1$ et $f' = f$. D'où l'on tire $s - c + f = s' - c' + m - 1 + f' = 2 + m - 1 = m + 1$.

Défénition 4. Soit p un sommet d'une figure G alors deg p est le nombre de fois que l'on passe par p en traçant la figure G.

Exemple 2. $\deg p = 5$

$\deg q = 2$

Théorème 1. Soit G une figure alors la somme des degrés de ses sommets est toujours deux fois le nombre de courbes; i.e. ${}_{p \in S} \deg p = 2c$.

Preuve. C'est vrai pour une figure à une courbe:

$1 + 1 = 2 \cdot 1$ $\qquad\qquad$ $2 = 2 \cdot 1$

Si à une figure G nous ajoutons une courbe pour obtenir une nouvelle figure G' alors ${}_{p \in S} \deg p$ devient ${}_{p \in S} \deg p = {}_{p \in S} \deg p + 2$ et $2c$ devient $2(c+1) = 2c + 2$.

La preuve est donc immédiate par induction mathématique sur c, le nombre de courbe.

Solution du problème 1.

Considérons la figure obtenue en traçant toutes les diagonales d'un polygone convexe à n côtés (Figure 1 pour $n = 5$). Soient $I =$ (sommets intérieurs) et $E =$ (sommets extérieurs). Bien sûr on a $\# E = n$. Combien y a-t-il de sommets intérieurs? Chaque choix de quatre sommets du polygone détermine un quadrilatère convexe dont les deux diagonales se croisent en un sommet intérieur. On a donc $\# I = \binom{n}{4} =$ nombre de façons de choisir quatre sommets parmi les n sommets du polygone $= \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

De plus pour $p \in E$ on a $\deg p = n - 1$ et pour $p \in I$ on a $\deg p = 4$.

Le théorème 1 donne: $2c = \sum_{p \in S} \deg p = \sum_{p \in E} \deg p + \sum_{p \in I} \deg p$

$$2c = (\# E)(n - 1) + 4(\# I)$$

$$2c = n(n-1) + 4\binom{n}{4}$$

On a donc $c = \dfrac{n(n-1)}{2} + 2 \cdot \binom{n}{4}$ et $s = n \cdot \binom{n}{4}$.

La formule d'Euler permet de calculer:

$$f = c - s + 2 = 2\binom{n}{4} + \frac{n(n-1)}{2} - n - \binom{n}{4} + 2$$

$$= \binom{n}{4} + \tfrac{1}{2}(n^2 - 3n) + 2$$

$$\text{et } a_n = f - 1 = \binom{n}{4} + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Solution du problème 2.

On a $b_n = a_n + n$, donc $b_n = \binom{n}{4} + \frac{n}{2}(n-1) + 1$

Calculons les quelques premières valeurs des suites an et bn

n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	0	0	1	4	11	25	50	...
b_n	1	2	4	8	16	31	57	...

La prochaine fois que vous aurez à "subir" un test d'intelligence il y aura la question inévitable suivante: "Quel est l'entier qui suit 1, 2, 4, 8, 16, ?". N'oubliez pas de répondre: "31" car c'est la bonne réponse.