UNE GENERALISATION ANALYTIQUE DU THEOREME DE F. MORLEY

Gilbert Labelle

1. Introduction

Le théorème bien connu, découvert en 1904 par le géomètre anglo-américain Frank Morley, s'énonce habituellement comme suit:

Théorème (Morley)

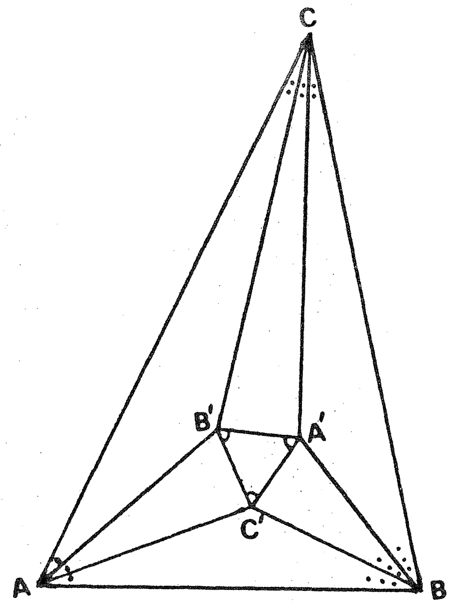
Les paires adjacentes des trisectrices intérieures des angles d'un triangle quelconque se rencontrent toujours aux sommets d'un triangle équilatéral (voir figure 1).

On connaît un certain nombre de démonstrations 1,2,4 de ce théorème et de nouvelles preuves apparaissent encore de temps en temps.

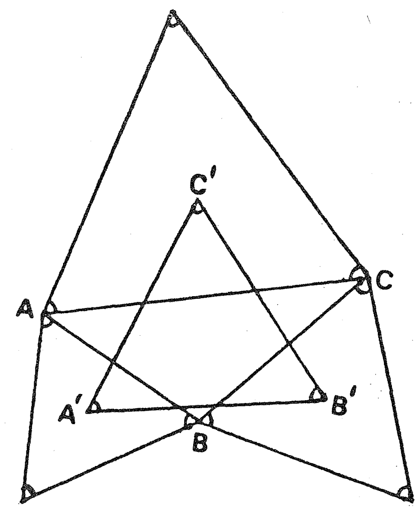
Un autre théorème qui est manifestement du même type est historiquement attribué au grand Napoléon:

Théorème (Napoléon)

Les centres des trois triangles équilatéraux (extérieurs) construits sur les côtés d'un triangle quelconque forment toujours les sommets d'un triangle équilatéral (voir figure 2).



Théorème de Morley
(figure 1)



Théorème de Napoléon
(figure 2)

Dans chacun de ces deux résultats on associe trois points

$$A' = f(A,B,C),\ B' = f(B,C,A),\ C' = (C,A,B) \qquad (1.1)$$

à chaque triangle non dégénéré (orienté positivement) ABC de façon telle que le triangle A'B'C' ainsi formé soit équilatéral (et orienté positivement). De plus, la fonction f commute avec toutes les transformations euclidiennes directes. C'est-à-dire que si ABC est un triangle alors

$$f(\mu A + \nu,\ \mu B + \nu,\ \mu C + \nu) = \mu f(A,B,C) + \nu \qquad (1.2)$$

où A, B, C, , sont interprétés comme des nombres complexes avec $\mu \neq 0$.

Convenons d'appeler Δ-théorème tout théorème décrivant une fonction f définie sur les triangles non dégénérés (orientés positivement) du plan (complexe) et satisfaisant les conditions mentionnées plus haut (i.e. (1.1), (1.2) et A'B'C' est équilatéral quel que soit le triangle ABC).

Le but de cette note est de <u>trouver explicitement tout les théorèmes possibles</u>.

2. <u>Le Δ-théorème général</u>

Comme f doit satisfaire (1.2) on peut écrire

$$f(A,B,C) = A + f(0,B-A,C-A) = A + (B-A)\ f(0,1,\frac{C-A}{B-A})$$

$$= A + (B-A)\ h(\frac{C-A}{B-A}) \quad \text{disons.} \tag{2.1}$$

Comme les triangles considérés sont supposés orientés positivement et non dégénérés, on en déduit que $\frac{C-A}{B-A} \in \mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$

où H désigne le demi-plan ouvert supérieur

$$x\text{-}iy/y > 0$$

du plan complexe $\mathbb{C}$.

La fonction f est donc complètement caractérisée (via (2.1) par la donnée d'une fonction

$$h:\ \mathbb{H} \longrightarrow C.$$

De plus, <u>on a</u> f(A,B,C) <u>est aux points</u> A,B,C <u>ce que</u> h (z) <u>est aux points</u> 0,1,z.

On en est donc réduit à chercher les fonctions h pour lesquelles la fonction f associée fournisse un Δ-théorème. Sans perte de généralité prenons maintenant $A = 0$, $B = 1$, $C = z \in \mathbb{H}$. Une substitution dans (2.1) et (1.1) nous donne alors

$$A' = h(z),\ B' = 1 + (z-1)\ h\left(\frac{1}{1-z}\right),\ C' = z - zh\left(\frac{z-1}{z}\right). \qquad (2.2)$$

La condition que A'B'C' soit équilatéral (et orienté positivement) est équivalente à la demande que

$$(B'-A')\sigma = (C'-A') \text{ où } \sigma = e^{i\Pi/3} \qquad (2.3)$$

comme on le vérifie facilement.

Substituant les valeurs (2.2) pour A', B', C' dans (2.3) on obtient le lemme

Lemme

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f donne lieu à un Δ-théorème est que la fonction h: $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ associée satifasse l'équation fonctionnelle

$$(\Lambda h)(z) = \sigma - z \quad \text{(pour tout } z \in \mathbb{H}) \qquad (2.4)$$

où Λ est l'opérateur linéaire défini par

$$(\Lambda h)(z) = \sigma^2 h(z) + (1-z)\ \sigma h\left(\frac{1}{1-z}\right) - zh\left(\frac{z-1}{z}\right) \qquad (2.5)$$

où $\sigma = e^{i\pi/3}$ est une racine cubique de -1.

Nous conviendrons d'appeler l'équation (2.4) la Δ-équation fonctionnelle.

Remarquons que lorsque la fonction h(z) est une fonction constante dont la valeur est $\alpha = \frac{1}{3}(1+\bar{\sigma})$ alors h(z) satisfait la Δ-équation fonctionnelle. Dans ce cas, on vérifie facilement que la fonction f associée est précisément celle qui décrit le théorème de Napoléon.

Nous aurons résolu notre problème général dès que nous aurons trouvé la solution la plus générale possible h(z) de la Δ-équation fonctionnelle. Voici donc la solution de ce problème:

<u>Théorème</u> (Δ)

<u>La solution générale de la -équation fonctionnelle peut s'exprimer explicitement de la façon suivante:</u>

$$h(z) = \alpha + 2u(z) + (1-z)\,\sigma^2 u\left(\frac{1}{1-z}\right) - \sigma z u\left(\frac{z-1}{z}\right) \tag{2.6}$$

<u>Démonstration</u>

Utilisant le fait que $\{I, T, T \circ T\}$, où $T(z) = \frac{1}{1-z}$, forme un groupe cyclique d'ordre 3 sous la composition on vérifie (modulo quelques calculs élémentaires) que (2.6) est bien une solution de (2.4). Inversement, soit h(z) une solution quelconque de (2.4) pour montrer que (2.6) a alors lieu il suffit de remarquer qu'il suffit de choisir la fonction u(z) comme étant la fonction

$$u(z) = \frac{1}{3}(h(z)-\alpha).$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

La partie non constante de (2.6) représente la solution générale de l'équation fonctionnelle homogène

$$(\Lambda h)(z) = 0$$

associée à (2.4) tandis que la partie constante de (2.6) représente une solution particulière de (2.4). Quelques calculs supplémentaires permettent de conclure que deux fonctions u_1 (z) et u_2 (z) donnent lieu à la même fonction h(z) (via (2.6)) si et seulement si elles diffèrent par une fonction o (z) de la forme

$$\delta(z) = \sigma^2 v(z) + (1-z)\, \sigma v(\frac{1}{1-z}) - z v(\frac{z-1}{z})$$

où v(z) est une fonction arbitraire définie sur $\mathbb{H}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

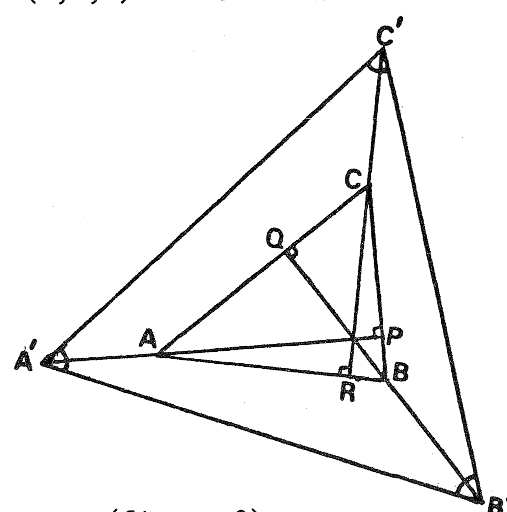
3. Conclusion

Les divers choix de la fonction arbitraire u(z) donnent lieu (via (2.6)) à un nombre non dénombrable de fonctions h(z) et donc, à un nombre non dénombrables de fonctions f(A,B,C) (i.e. de Δ-théorèmes). En substituant h(z) = z+b dans (2.4) on vérifie sans peine que la seule fonction h(z) donnant lieu à un Δ-théorème et qui soit une translation est la fonction:

$$h(z) = z + i/\sqrt{3}$$

C'est une translation verticale particulière. En interprétant géométriquement la fonction f = f(A,B,C) associée on obtient le résultat:

Si les trois hauteurs PA, QB, RC d'un triangle quelconque ABC (voir figure 3) sont prolongées d'une longueur égale à 1/ 3 fois la longueur de leur côté associé alors les trois points A', B', C' qui en résultent forment toujours les sommets d'un triangle équilatéral 3 .



(figure 3)

D'une façon analogue, les seules fonctions $h(z)$ du type $h(z) = az+b$ qui donnent lieu à un Δ-théorème sont celles pour lesquelles

$$(\sigma-2)a - (1+\sigma)b + 1 = 0$$

Le cas $a = 0$ donne $b = \alpha$ et on retombe sur le théorème de Napoléon.

Le lecteur intéressé peut former des Δ-théorèmes de son crû en prenant diverses fonctions $u(z)$ qui lui viennent à l'esprit (ou en essayant directement dans (2.4) diverses fonctions $h(z)$.

Le lecteur patient, armé d'un crayon, peut vérifier que la fonction particulière

$$h(z) = z^{1/3} \cdot \frac{\operatorname{Im} U(z)}{\operatorname{Im} V(z)}$$

où $U(z) = [T(z)]^{1/3}$, $V(z) = z^{1/3} \cdot [T(z)]^{1/3}$ et où les racines cubiques sont prises sur leur branche principale donne lieu au théorème de Morley.

Comme les contructions en jeu dans notre approche à la formation du -théorème général ne mettent en jeu que les opérations élémentaires addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée (pour le calcul de $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$) et que ces opérations peuvent toutes se faire à l'aide d'une règle et un compas, on obtient comme corollaire <u>particulier</u>:

<u>Corollaire</u>

Si Ω est un ensemble quelconque d'instruments de constructions géométriques contenant <u>au moins</u> la règle et le compas alors $A' = f(A,B,C)$, $B' = f(B,C,A)$, $C' = f(C,A,B)$ peuvent se construire, à partir de A, B, C, avec l'aide des instruments de Ω si et seulement si f est de la forme décrite par (2.1) et (2.6) où u(z) est une fonction qui peut être construire à partir de 0, 1, z avec l'aide des instruments de Ω .

Les idées contenues dans cet article donnent un exemple de plus à l'affirmation bien connue de D. Hilbert qui veut que la Géométrie soit une étude des groupes de transformations des espaces en considération.

REFERENCES

1 J.M. Child, A proof of Morley's theorem, Math. Gaz. (1922), 171.

2 R. Honsberger, Mathematical Gems, Dolciani Mathematical Expositions M.A.A., (1973).

3 G. Labelle, Problème no 7, Concours mathématiques du Québec, 1975.

4 M.T. Naraniengar, Mathematical Questions and their Solutions from the Educational Times (New Series), Vol. 15, (1909), p. 47.