

la théorie des catastrophes

RÉSEAU

Jean-Guy Dubois ne savait pas que les transports en commun de Montréal seraient paralysés par une grève quand, l'automne dernier, il a intitulé "La théorie des catastrophes: une introduction pour piétons" une conférence qu'il avait été invité à donner au département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal. Le choix de ce titre a en effet précédé de quelques semaines le jour prévu pour la conférence en même temps que la grève des employés de la Commission des transports qui a obligé les Montréalais à redevenir piétons pour quelques jours. Même si cette grève fut effectivement une "catastrophe" pour plusieurs Montréalais, la théorie des catastrophes dont a parlé M. Dubois n'avait rien à voir avec la situation qui prévalait alors dans les transports en commun de Montréal.

Votre tête est une catastrophe

Et pourtant, cette grève pourrait bien illustrer cette théorie des catastrophes. Cette théorie permet en effet de caractériser les changements brusques qui surviennent dans un système donné entre deux états d'équilibre relativement stables. Ainsi, une faille géologique, la solidification de l'eau, une crise économique, une agression et même une crise cardiaque, sont des "catastrophes" au sens de cette théorie. Si l'on ajoute que la forme du visage, des lèvres ou du nez sont aussi des catastrophes, on fera sourire bien des lecteurs. En tout cas, il y a cinq ans, quand on a commencé à parler de la théorie des catastrophes à l'Université du Québec à Rimouski, plusieurs non-initiés avaient trouvé assez drôle d'apprendre que leur tête était une "catastrophe". Les gens qui en avaient parlé les premiers alors ne voulaient cependant pas badiner. Il s'agissait de gens très sérieux. Le premier fut Jean-Guy Dubois, professeur-chercheur en mathématiques en en physique. Il

prépara un projet de recherche, essentiellement interdisciplinaire, sur la théorie des catastrophes initiée par le grand mathématicien français René Thom. M. Dubois a réuni un noyau formé de Jean-Paul Dufour, Richard Desmairais, Claude Meyer, Christian Regnaut, Pierre Bélanger. Le groupe, qui s'est ultérieurement modifié par le départ de quelques membres et l'arrivée de nouveaux, dont M. Oleg Stanek, a tenu des séminaires hebdomadaires pendant plusieurs sessions, de janvier 1972 à juin 1974. Que cherchaient donc M. Dubois et les membres de son équipe? D'abord, ils voulaient approfondir davantage la théorie des catastrophes et en trouver des applications dans divers domaines. Mais, qu'est-ce que la théorie des catastrophes? M. Dubois trouve aussi difficile d'expliquer cette théorie au non-spécialiste que de définir la théorie des équations différentielles.

La Machine à catastrophe

Newton a inventé les équations différentielles pour décrire l'évolution continue des phénomènes de la nature, comme le mouvement des planètes. De façon complémentaire, René Thom, lui, a formulé la théorie des catastrophes pour en décrire les discontinuités. Pour illustrer cette idée, on pourrait par exemple utiliser le modèle des battements cardiaques; à l'aide de la "machine à catastrophes", on pourrait simuler la syncope ou la crise cardiaque. Cette machine à catastrophes n'est pas un engin de destruction inventé et utilisé pour un être diabolique. Il s'agit d'un "jouet" inventé par le professeur E.C. Zeeman, le promoteur anglo-saxon de la théorie. Nous avons donné hors-texte les instructions nécessaires pour la confection de cette machine. M. Dubois a expliqué que la théorie des catastrophes est plus qu'une théorie scientifique, parce qu'elle propose une méthode générale d'élaboration des modèles. Dans ce sens, elle est une théorie phénoménologique de la morphogénèse, qui fournit une systématisation simplificatrice des données empiriques par une classification des singularités possibles de leur représentation graphique. Cette théorie postule que les morphologies des objets sont régies par des "logos" mathématiques, qu'elle identifie les dynamiques sous-jacentes à des modèles archétypes. La nature mathématique complexe de cette théorie est ainsi sous-tendue par une méthodologie particulière. Cette méthodologie s'éloigne

des stéréotypes courants, puisqu'elle avance une approche structurale plutôt que réductionniste, qualitative (quoique d'un qualitatif rigoureux) plutôt que quantitative, géométrique plutôt que numérique, synthétique plutôt qu'analytique. Par l'utilisation des méthodes de la topologie différentielle et de la théorie des singularités, elle vise l'intelligibilité plutôt que le modélisme naïf du curve fitting.

Mettre en scène des catastrophes

Ces explications, malgré leur rigoureuse précision scientifique, ne sont pas faciles à comprendre pour le profane. Quelques exemples permettront peut-être de mieux les saisir. A l'aide de la théorie des catastrophes, on peut, par exemple, construire un modèle de l'agression chez l'animal, en prenant comme variable d'état le comportement: on peut obtenir deux comportements différents, l'attaque ou la fuite. En étudiant attentivement le fonctionnement de la "machine à catastrophes", le lecteur pourra lui-même construire d'autres modèles du genre. Les chercheurs qui collaborent avec M. Dubois, tout en continuant à développer cette théorie sur le plan mathématique, l'appliquent en particulier à la physique, notamment aux singularités des fronts d'onde dont les caustiques de l'optique, aux transitions de phase des systèmes thermodynamiques, aux ondes de choc de la dynamique des fluides, aux instabilités de la force d'entraînement et aux réactions chimiques multistationnaires. On peut également trouver des applications dans d'autres domaines, notamment à la linguistique à l'économique (théorie du marginalisme de la microéconomie), etc. MM. Dubois, Dufour et Stanek ont entrepris la publication, dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré (1), d'une série d'articles dans lesquels ils livrent les résultats de leurs recherches.

Tantôt seul, tantôt avec ses collègues, M. Dubois a également présenté les premiers résultats de ses recherches à l'occasion des congrès de l'Association canadienne-française pour l'avancement des sciences (ACFAS), de l'Association mathématique du Québec (AMQ), et au Colloque des mathématiciens du Québec (CMQ). Il a également donné des conférences sur invitation aux départements de mathématiques des universités constituantes de l'Univ. du Québec, à Mtl, Trois-Riv. et Chicoutimi ainsi qu'à l'Univ. de Sherbrooke. Lors de la dernière session, M. Dubois a été invité à poursuivre ses travaux au dept. de Math. de l'Univer-

sité du Québec à Montréal. Il y a animé une série de séminaires sur la théorie des catastrophes, parallèlement à une autre série qu'il a donné à l'Université de Sherbrooke (2).

Les travaux du groupe ne sont pas terminés. Les chercheurs espèrent, entre autres, soumettre aux *Annales de l'Institut Henri Poincaré* avant la fin de l'année 1976 un autre article sur les transitions de phase thermodynamiques. L'un des proches collaborateurs de M. Dubois, Jean-Paul Dufour, travaille maintenant à l'Université de Montpellier, en France, après avoir passé trois ans à l'UQTR, d'abord comme coopérant militaire. Grâce à la Coopération franco-québécoise, M. Dubois séjournera en France pendant un mois et demi l'été prochain et rencontrera M. Dufour, avant que celui-ci ne vienne au Québec à son tour en août prochain.

Les chercheurs intéressés par ce projet ont pu compter, en 1974, sur la collaboration d'un autre spécialiste français. Le Dr Bernard Morin, professeur à l'Université de Strasbourg, a donné en juin 1974 une série de séminaires sur la théorie des singularités dans le cadre du projet de recherche sur la théorie des catastrophes.

En plus des conférences et des communications sur la théorie des catastrophes — une quinzaine — qu'il a données depuis quatre ans et des quatre articles parus dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré* — une centaine de pages —, M. Dubois a poursuivi d'autres recherches dans le domaine de la physique-mathématique. Depuis quatre ans, il a publié trois autres articles et a présenté cinq autres communications, soit à l'occasion des colloques des mathématiciens du Québec, soit aux congrès de l'ACFAS. En travaillant à un rythme aussi essoufflant, M. Dubois n'a pas peur des « catastrophes ». □

Gaétan BEAULIEU

- (1) *Annales de l'Institut Henri Poincaré* — «La théorie des catastrophes» —
 - I. La machine à catastrophe (J.-G. Dubois et J.-P. Dufour), section A, volume XX, numéro 2, 1974, pages 113-134;
 - II. Dynamiques gradientes à une variable d'état (J.-G. Dubois et J.-P. Dufour) section A, volume XX, numéro 2, 1974, pages 135-151;
 - III. Caustiques de l'optique géométrique (J.-G. Dubois, J.-P. Dufour et O. Stanek) section A, volume XXIV, numéro 3, 1976, pages 261-300.
 - IV. Déploiements universels et leurs catastrophes (Dubois, Dufour et Stanek) Section A, volume XXIV, numéro 3, 1976, p. 261-300.
- (2) *Cahiers d'analyse moderne*, numéro 15, Université de Sherbrooke, automne 1975, 74 pages.

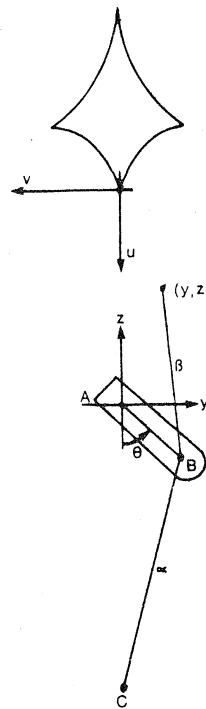
Pour mathématiciens-bricoleurs

La machine à catastrophe

Voici le mode d'emploi pour la construction et le fonctionnement de la machine à catastrophes.

A une tige mobile autour d'un point fixe A, sont attachés en B deux élastiques a et B dont l'extrémité de l'un est fixée en C, et de l'autre, mobile dans le plan. L'état du système, l'angle de rotation de la tige, est contrôlé par le bout mobile de l'élastique B, dans ce sens qu'un contrôle (y, z) donné dans le plan implique un état stable du système.

Dans une région de plan, un contrôle fixé n'implique qu'un état d'équilibre dans une autre, il en détermine deux. Les frontières de ces domaines sont délimitées par l'astéroïde de la première figure: un état stable possible à l'extérieur de l'astéroïde et deux à l'intérieur. Lorsque les points de contrôle suivent un chemin transverse à l'axe y , à la branche de sortie, le système change brusquement d'état d'équilibre. Le contour apparent correspondant, dans le plan de contrôle, à ces discontinuités d'état ou catastrophes nous fournit les morphologies cuspidées de l'astéroïde. Ce sont les lieux du plan de contrôle où se résout le conflit d'état créé par les forces de rappel des élastiques tendus.



La machine à catastrophes.

Si, pour une région de contrôle avoisinante à l'une des cuspidés de cet ensemble de catastrophes, on rassemble tous les états d'équilibre de ce système en un seul graphique, on obtient canoniquement la surface (dite fronce de Whitney) tracée à la deuxième figure. D'un seul coup d'oeil, cette surface bien connue des physiciens (les états d'équilibre d'un fluide de Van der Waals forment la même surface) nous fait comprendre comment la machine à catastrophes doit changer brusquement d'état. Une variation continue de contrôle (plan des u et v) amène l'état (l'axe des x) du système à l'une des lignes de pli, obligeant ce dernier à sauter brusquement sur une autre feuille d'états d'équilibre (les feuilles supérieures et inférieures correspondant à des états stables; la feuille intermédiaire, à des états instables). Le théorème central de la théorie nous apprend que pour chaque dimension les graphiques représentent les états d'équilibre d'un système sont composés d'un nombre fini d'ingrédients et il fournit une liste de ceux-ci. Par exemple en trois dimensions, on a localement quatre situations ordinaires, la pente, le mont, la vallée et le col, et deux exceptionnelles, le pli et la fronce.

