L'ASPECT RELATIVISTE DE LA RIGUEUR STANDARD EN MATHÉMATIQUE RÉVÉLÉ PAR L'HISTOIRE.[1]

par: *Jean-Paul Collette*
Cegep Montmorency

Dans un sens large, la rigueur, quelque soit le domaine de connaissance scientifique, signifie l'adhérence à des procédures qui sont généralement acceptées comme conduisant à des conclusions vraies. Ces procédures auxquelles on se réfère prennent la forme généralement de normes standards établies par une association de professionnels de la discipline concernée ou même par un groupe restreint de spécialistes.

L'acceptation d'une proposition mathématique par un groupe de mathématiciens peut fort bien être contestée et même rejetée par un autre groupe, tout aussi sélect que le premier. De plus, le domaine des mathématiques fourmille d'exemples variés, les uns plus cocasses que les autres, où le mathématicien X affirme que sa démonstration est sans reproche alors que le mathématicien Y la conteste sérieusement ou même la rejette tout simplement. Qu'il nous suffise ici de rappeler à titre d'exemple, la controverse bien connue entre les mathématiciens David Hilbert et L.E. J. Brouwer au sujet des méthodes rigoureuses de démonstration en mathématiques. Nous touchons là au premier aspect de la relativité de la rigueur standard en mathématiques.

Un second volet est illustré par le fait que la rigueur est non seulement fonction du groupe concerné, mais aussi de l'époque où l'on vit. En effet, la rigueur standard varie ostensiblement avec le passage du temps. Le concept du nombre zéro conçu par Brahmagupta au VIIe siècle n'avait pas la rigueur qu'on peut

----

1. Cet article s'inspire d'un texte publié dans Dictionary of The History of Ideas sous la plume de R.L. Wilder.

constater dans les textes de Bolzano ou de Dedekind. Toutefois, en fonction de l'époque, on peut difficilement prétendre que la rigueur mathématique d'un Brahmagupta était inférieure à celle d'un Bolzano. De plus, ce qui était considéré comme rigoureux par les normes standards du XVIIIe siècle ne pourrait certainement pas rencontré les exigences établies par les scientifiques du XXe siècle.

Le troisième volet de cette relativité met en relief l'adéquation entre l'évolution chronologique d'un domaine de connaissance et l'amélioration de la rigueur standard. En effet, les civilisations naissent et meurent, et les normes standards établies par une culture peuvent être oubliées ou perdues, ce qui entraîne souvent qu'elles doivent être récrées ou remplacées par les cultures qui assurent la relève. Le déclin de la civilisation grecque et l'ascension lente et graduelle des cultures arabes et européennes illustrent bien que l'évolution dans le temps n'entraîne pas nécessairement une rigueur mathématique plus perfectionnée en ce qui a trait aux normes acceptées.

Le développement du concept de rigueur en mathématique révèle des faits historiques instructifs et éclairants qui devraient nous convaincre ou tout au moins nous instruire sur la relativité de la rigueur standard en mathématiques. Contentons-nous ici d'esquisser quelques faits choisis qui illustreront notre propos.

Dans les mathématiques babyloniennes, nous y trouvons un système positionnelle de numération qui, malgré l'absence du nombre zéro, leur permettait de représenter efficacement les nombres et d'effectuer facilement les opérations arithmétiques élémentaires. Devenus d'habiles calculateurs, ils ont développé des méthodes de résolution d'équations algébriques,des formules géométriques ainsi qu'une technique très efficace pour extraire la racine carrée d'un nombre, laquelle fournit, à coup sûr, une approximation de $\sqrt{2}$ égale à 1,414213. Malgré que nous ne voyons nulle part un souci quelconque de justifier et de prouver les règles utilisées, leurs existences même impliquent le développement d'un type de normes standards selon lesquelles ces propositions algébriques et géométriques devinrent admissibles pour la résolution des problèmes répondant à leurs besoins utilitaires. Ces normes de nature probablement intuitive et traditionnelle, englobaient possiblement des tests de nature pragmatique. Par exemple, la formule trouvée par un babylonien pour résoudre un problème d'excavation, devenait acceptable à ses contemporains dans la mesure où ils parvenaient à résoudre d'autres problèmes d'excavation en utilisant la même formule. Bien que ceci soit très hypothétique, nous pouvons faire remarquer que les Grecs, qui entretenaient des contacts culturels avec les Perses, utilisèrent à l'origine des tests de validité tout à fait semblables.

Le concept de rigueur standard étudié dans les mathématiques égyptiennes a probablement fait l'objet de normes semblables à celles utilisées dans les mathématiques babyloniennes. Par exemple, en ce qui a trait à leur arithmétique, nous savons que l'ensemble des procédés utilisés est essentiellement conçu de manière à respecter leurs deux principes opérationnels: le principe inhérent à leur capacité de multiplier et diviser par deux, et celui qui est propre à leur capacité de trouver les 2/3 de tout nombre, entier ou fractionnaire. De plus, le développement des fractions unitaires (de la forme $1/n$), leur a permis de construire une table de décomposition des fractions $2/n$ de $n=3$ à $n=101$, en sommes de fractions unitaires d'une manière telle que les décompositions de la table sont généralement les plus simples qu'il soit possible d'obtenir. Au sujet de cette table, nous connaissons un ensemble de préceptes qui étaient utilisés dans le choix d'une décomposition particulière parmi celles qui étaient possibles. Aussi, la décomposition choisie par le scribe est admissible dans la mesure où elle répond aux normes standards établies. Dans ce sens, elle devenait tout à fait rigoureuse comme être mathématique puisqu'elle satisfaisait à un ensemble standard de règles dûment définies.

Nous pouvons aussi mentionner brièvement quelques résultats étonnants pour l'époque, obtenus par les Egyptiens, dans le domaine de la géométrie: la construction des pyramides, une approximation de π équivalente à $3\frac{1}{6}$ et la formule exacte du volume du tronc de pyramide à base carrée. Malgré l'absence de normes standards connus, peut-on vraiment douter de leurs existences, quelque soit leur nature, lorsque de tels résultats nous sont révélés? Encore faut-il se demander si les Egyptiens auraient pu développer une mathématique plus rigoureuse? Mais, en fait, la question ne se pose même pas dans le contexte des mathématiques égyptiennes.

La plus vieille histoire des mathématiques grecques qui fut écrite par un disciple d'Aristote, Eudème, au IVe siècle avant le Christ, nous apprend que Thalès de Milet, fondateur de la géométrie grecque, fut celui qui a inventé plusieurs choses et qui a montré à ses successeurs la voie vers les principes de plusieurs de ces choses. On y mentionne aussi que Pythagore est celui qui a changé la philosophie (géométrie) en une forme de doctrine libérale, en étudiant ses principes d'une manière plus exaltante et en examinant ses théorèmes sous le rapport de l'intelligence. Ce court commentaire montre déjà que les Grecs cherchent très tôt à élaborer une science déductive dans laquelle les notions de démonstration, de théorème, de définition et d'axiome remplacent le caractère empirique et particulier des mathématiques préhelléniques.

On peut difficilement expliquer encore aujourd'hui pourquoi les mathématiciens grecs ont cherché à établir des méthodes et des principes mathématiques les plus universels possible transformant ainsi une mathématique de cas concrets en une mathématique plus générale qui frise la perfection et dont l'harmonie interne est indéniable. Cette perfection fut atteinte parce que les Grecs ont idéalisé le monde sensible, ce qui entraînait nécessairement le remplacement de normes standard de nature intuitive ou pragmatique par de nouvelles normes, issues probablement de la logique déductive d'Aristote, d'une série de paradoxes formulés par Zénon d'Elée et de la méthode d'exhaustion d'Eudoxe. Par exemple, la démonstration de l'incommensurabilité du côté d'un carré avec sa diagonale dépassait nettement le niveau de la perception visuelle pour faire appel davantage à une argumentation du type dialectique (loi de la réduction à l'absurde). C'est ainsi que la démonstration rigoureuse prenait la forme d'une démonstration par la logique.

La rigueur standard atteinte par les mathématiques grecques, grâce à un ensemble de normes fondées sur la logique déductive et des principes généraux, sera améliorée, au sens de l'adhérence à un ensemble de normes plus perfectionné seulement au XIXe siècle. Entre-temps, nous assistons à un développement considérable, tant au plan du symbolisme, qu'au plan du contenu conceptuel.

Pendant cette période où le symbolisme se développe, c'est l'aspect opérationnel qui prend le pas sur la justification conceptuelle. Toutefois, les symboles et les opérations qui furent inventés avec un minimum de justification, se sont avérés justifiables par les résultats obtenus a fortiori. Qu'il nous suffise de mentionner, à titre d'exemple, l'invention des nombres complexes (de la forme $a + bi$) à partir de la résolution des équations quadratiques et cubiques et l'introduction d'un symbolisme approprié dans le développement fulgurant du calcul infinitésimal à partir de Newton et Leibniz au XVIIe siècle.

C'est avec le XVIIIe siècle que les mathématiciens, bien engagés dans le développement des diverses branches de la mathématique, commencent à se poser des questions sérieuses au sujet de la justification conceptuelle et logique de ces agrégats mathématiques nouvellement inventés. Nous assistons alors à des débats orageux et des querelles célèbres au sujet des normes standards acceptables, et l'aspect relativiste de la rigueur standard en mathématique est fortement mise en relief dans la formation des Ecoles de pensée telles que les Formalistes et les Intuitionnistes.

Au début du XXe siècle, on pensait pouvoir atteindre une rigueur mathématique absolue au moyen des méthodes de l'axiomatique formelle. Toutefois, un tel concept de rigueur absolue est apparemment un idéal vers lequel on tend, sans pouvoir l'atteindre en pratique, sauf en des domaines limités bien spécifiques.

Ce qui nous amène à la conclusion suivante: le mathématicien qui croit en une vérité mathématique rigoureuse doit admettre, dans l'état actuel des connaissances, qu'il sera probablement jamais possible de l'atteindre.