Théorème de Binet

par: *Jacques Labelle Ph. D.*
Université de Montréal
et UQAM

Dans cet article, nous décrivons quatre techniques permettant l'étude des suites définies par récurrence. Afin de simplifier les calculs, dans chaque cas, après avoir brièvement expliqué la théorie nous l'appliquerons pour prouver le théorème de Binet donnant une forme explicite du $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci.

Rappel: La suite de Fibonacci, (f_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ est définie par

1) $f_0 = f_1 = 1$

2) $\forall\, n \geqslant 0,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

i.e. c'est la suite: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots)$

I) Fonctions génératrices

Posons $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, t^n = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + \ldots$

Lemme 1: $$F(t) = 1 + t\,F(t) + t^2\,F(t)$$

Preuve: $$t\,F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, t^{n+1} = t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}\, t^n$$

$$t^2\,F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, t^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}\, t^n$$

$$1 + t\,F(t) + t^2\,F(t) = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2})\, t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} f_n\, t^n = F(t)$$

<u>Lemme 2</u>: $$F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}$$

<u>Preuve</u>: $F(t)(1 - t - t^2) = 1$ par le lemme 1.

Calculons maintenant f_n

$$F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2} = \frac{-1}{t^2 + t - 1} = \frac{A}{t - a} + \frac{B}{t - b}$$

où a et b sont les racines de $t^2 + t - 1$, $a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $b \ \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$,

i.e. $A + B = 0$ et $-aB - bA = -1$, d'où $F(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \dfrac{1}{t-a} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \dfrac{1}{t-b}$

$F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\dfrac{1/a}{1-t/a} - \dfrac{1/b}{1-t/b} \right]$, posons $\alpha = 1/a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

et $\beta = 1/b = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$$F(t) = \frac{1}{5} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha t} - \frac{\beta}{1-\beta t} \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[(\alpha + \alpha^2 t + \alpha^3 t^2 + \ldots) - (\beta + \beta^2 t + \beta^3 t^2 + \ldots) \right]$$

(car $1 + r + r^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-r}$ pour $|r| < 1$)

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n\;1} - \beta^{n\;1}) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, t^n$$

<u>Théorème de Binet</u>

$$\forall\, n \geqslant 0,\ f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]$$

II) Calcul matriciel

Posons $$F_n = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1} & f_n \end{bmatrix} \quad , n \geq 1.$$

Lemme 3: $\forall\ n \geq 1,\ F_{n+1} = F_n \,.\, A$ où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Preuve:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = F_1 \,.\, A^0$$

$$F_n \,.\, A = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1} & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n+f_{n+1} \\ f_n & f_{n-1}+f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_{n+2} \\ f_n & f_{n\,1} \end{bmatrix} = F_{n+1}$$

Lemme 4: $\forall\ n \geq 1,\ F_n = F_1 \,.\, A^{n-1}$ où $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Preuve: $$F_{n+1} = F_n \,.\, A = (F_1 \,.\, A^{n-1}) \,.\, A = F_1 \,.\, A^n$$

Le calcul de A^n deviendra facile si nous diagonalisons la matrice A.
Les valeurs propres de A sont les racines de

$$\det\,(A-xI) = \det \begin{bmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{bmatrix} = x^2 - x - 1; \quad \text{i.e. } \alpha \text{ et } \beta.$$

On a donc $A = B \,.\, D \,.\, B^{-1}$ où $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ et B est une matrice 2 x 2.

Un calcul facile donne $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$

D'où
$$\begin{aligned} F_n = F_1 A^{n-1} &= F_1 (B\ D\ B^{-1})^{n-1} \\ &= F_1\ B\ D^{n-1}\ B^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \beta^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1+2\alpha & 1+2\beta \\ 1+\alpha & 1+\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \beta^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha^{n-1}+2\alpha^n & \beta^{n-1}+2\beta^n \\ \alpha^{n-1}+\alpha^n & \beta^{n-1}+\beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

mais $\alpha^{n-1} + \alpha^n = \alpha^{n+1}$ et $\alpha^n + \alpha^{n+1} = \alpha^{n+2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha^n \; \alpha^{n+1} & \beta^n+\beta^{n+1} \\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha^{n+2} & \beta^{n+2} \\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\beta\alpha^{n+2}+\alpha\beta^{n+2} & \alpha^{n+2}-\beta^{n+2} \\ -\beta\alpha^{n+1}+\alpha\beta^{n+1} & \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} \end{bmatrix}$$

Comme $-\beta = 1/\alpha$ et $\alpha = -1/\beta$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & \alpha^{n+2}-\beta^{n+2} \\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} \end{bmatrix}$$

i.e. $$\begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1} & f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}) & \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n) & \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}) \end{bmatrix}$$

i.e. $n = 1$, $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$

et nous retrouvons la formule de Binet.

III) Algèbre linéaire

Soit S l'ensemble des suites de nombres réels.

$S = \{(a_n)_{n=0,1,2,\ldots} \mid \forall n,\ a_n \in \mathbb{R}\}$

Il est clair que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
(Attention! $\dim S > \chi_0$).

Soit $F = \left\{ (a_n)_{n=0,1,2,\ldots} \mid \forall n,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \right\}$. On voit facilement que F est un sous-espace de dimension deux de S. Par exemple, les deux suites $(1,0,1,1,2,3,4,\ldots)$ et $(0,1,1,2,3,5,\ldots)$ forment une base de F.

Cherchons des progressions géométriques $(1,r,r^2,\ldots)$ appartenant à F.

Lemme 5: $(1,r,r^2,\ldots) \in F \Rightarrow r = \alpha$ ou $r = \beta$

Preuve: $(1,r,r^2,\ldots) \in F \Rightarrow r^2 = r + 1$

$$\Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha \quad \text{ou} \quad r = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta$$

Lemme 6: $\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\ldots),\ (1,\beta,\beta^2,\ldots)\}$ est une base de F.

Preuve: $a(1,\alpha,\alpha^2,\ldots) + b(1,\beta,\beta^2,\ldots) = 0$

$\Rightarrow a + b = 0$ et $a\alpha + b\beta = 0$

$\Rightarrow a\alpha - a\beta = a(\alpha-\beta) = \sqrt{5}a = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$.

Lemme 7: $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a(1,\alpha,\alpha^2,\ldots) + b(1,\beta,\beta^2,\ldots) = (1,1,2,3,5,\ldots) = (f_n)_{n=0,1,2,\ldots}$$

Preuve: Par le lemme 6 puisque $(f_n)_{n=0,1,2,\ldots} \in F$.

Calculons a et b:

$$a + b = 1 \quad \text{et} \quad a\alpha + b\beta = 1$$

$$\Rightarrow (\alpha-\beta)b = \alpha - 1 \Rightarrow b = \frac{-\beta}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad a = \frac{\alpha}{5}$$

d'où $\forall n \geq 0,\ f_n = a\alpha^n + b\beta^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$

IV) Transformées de Laplace

Définition: La transformée de Laplace de la fonction $F(t)$, $t \geq 0$, est la nouvelle fonction

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) \text{ définie par } f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt.$$

Posons ici $F(t) = f_n$ lorsque $t \in [n,n+1)$ (fonction en escalier)

Lemme 8: $$F(t+2) = F(t+1) + F(t)$$

Preuve: Trivial puisque $\forall n \geq 0,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Lemme 9: $$\pounds\{F(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{\sqrt{5}\, s} \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha e^{-s}} - \frac{\beta}{1-\beta e^{-s}} \right\}$$

Preuve: Il suffit d'utiliser la formule suivante et de longs calculs

$$\begin{aligned}
\pounds\{F(t+1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, F(t+1)dt = \int_1^\infty e^{-s(t-1)}\, F(t)dt \\
&= e^s \int_0^\infty e^{-st}\, F(t)dt - e^s \int_0^1 e^{-st}\, F(t)dt \\
&= e^s\ \pounds\{F(t)\} - \frac{e^s}{s}(1-e^{-s}) \quad \text{car } F(t) = 1 \text{ si } t \in [0,1).
\end{aligned}$$

Lemme 10: $$F(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \text{ pour tout } t \in [n,n\ 1)$$

Preuve: En général, (voir Schaum, page 123), pour $G(t) = r^n$, $t \in [n,n\ 1)$, on a

$$\pounds\left\{G(t)\right\} = \frac{1-e^{-s}}{s} \quad \frac{1}{1-re^{-s}}$$

Ici $$\pounds\{F(t)\} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}(1-e^{-s}) \quad \frac{1}{1-\alpha e^{-s}} - \frac{\beta}{\sqrt{5}}(1-e^{-s}) \quad \frac{1}{1-\beta e^{-s}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(t) &= \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\ \alpha^n - \frac{\beta}{\sqrt{5}}\ \beta^n \quad \text{pour tout } t \in [n,n+1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})
\end{aligned}$$

i.e. $\forall n,\ f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$ comme toujours.

Remarque 1: Le lemme 4 nous donne l'identité remarquable:

$$\forall n \geq 1,\ f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

En effet, $$\begin{aligned}
f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} &= \det(F_n) = \det(F_1 \cdot A^{n-1}) \\
&= \det F_1 \ .\ (\det A)^{n-1} \\
&= 1\ .\ (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

Remarque 2: Puisque $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\forall n$, $\frac{|\beta|^{n+1}}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ et f_n est toujours l'entier le plus près de $\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

Par exemple, $\ell n \frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \ \ell n \ \alpha - \frac{\ell n \ 5}{2} = 2{,}5762...$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376{,}9...$$

$$\Rightarrow \quad f_{13} = 377$$

Remarque 3: La formule de Binet nous donne aussi le résultat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha \qquad (\text{car } |\beta| < 1)$$

EXERCICES:

I) De combien de façons peut-on monter un escalier de n marches en faisant des sauts d'une ou de deux marches ?

II) Etudier les suites suivantes:

a) $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $\forall n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(2, 5, 7, 12, 19, ...)

b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $\forall n \geq 0$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

(0, 1, 5, 19, 65, 211, ...)

c) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $\forall n \geq 0$, $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$

(1, 2, 3, 2, -9, -58, ...)

d) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

(1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, ...)

e) $a_0 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$, $\forall n \geq 0$

(1, 1, 2, 4, 8, 15, 27, 47, ...)

f) $a_0 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + n \cdot a_n$, $\forall n \geq 0$

(1, 1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, ...)

BIBLIOGRAPHIE

LABELLE, G., Quelques curiosités mathématiques, Lidec Inc, 1965

SPIEGEL, M.R., Laplace Transforms, Schaum, 1965

VOROBIEV, N., Caractères de divisibilité; suite de Fibonacci, Edition Mir. Moscou

WHITEHEAD, E.G., Enumerative Combinatories, Courant Institute Lecture Notes, 1971