EXPLORATION

D'UN ENSEMBLE EQUIPOTENT A N

par: *Denis Therrien*
Université Laval

Le fait que l'ensemble N x N a même cardinalité que N contredit carrément les déductions du gros bon sens:

> "Un premier germe de la notion générale d'équipotence apparaît dans une remarque de Galilée: il observe que l'application $n \to n^2$ établit une correspondance biunivoque entre les entiers naturels et leurs carrés ... Mais bien loin d'inaugurer une étude rationnelle des ensembles infinis, cette remarque ne paraît avoir eu d'autre effet que de renforcer la méfiance vis-à-vis l'infini ... " (1)

Cette propriété d'un ensemble infini introduit une faille dans le principe séculaire: " Le tout est plus grand que la partie ".

Le schéma I montre que l'on peut numéroter les éléments de N x N à l'aide de N. Cependant, cet article veut expliquer comment on peut générer les couples (N x N , ≤) en utilisant simplement la structure d'ordre habituel de N.

---

(1) Bourbakis, Nicolas, Eléments d'histoire des mathématiques, Hernan, Paris 1969, p.41.

	0	1	2	3	4	5	6
0	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)
1	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(0,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(0,6)	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

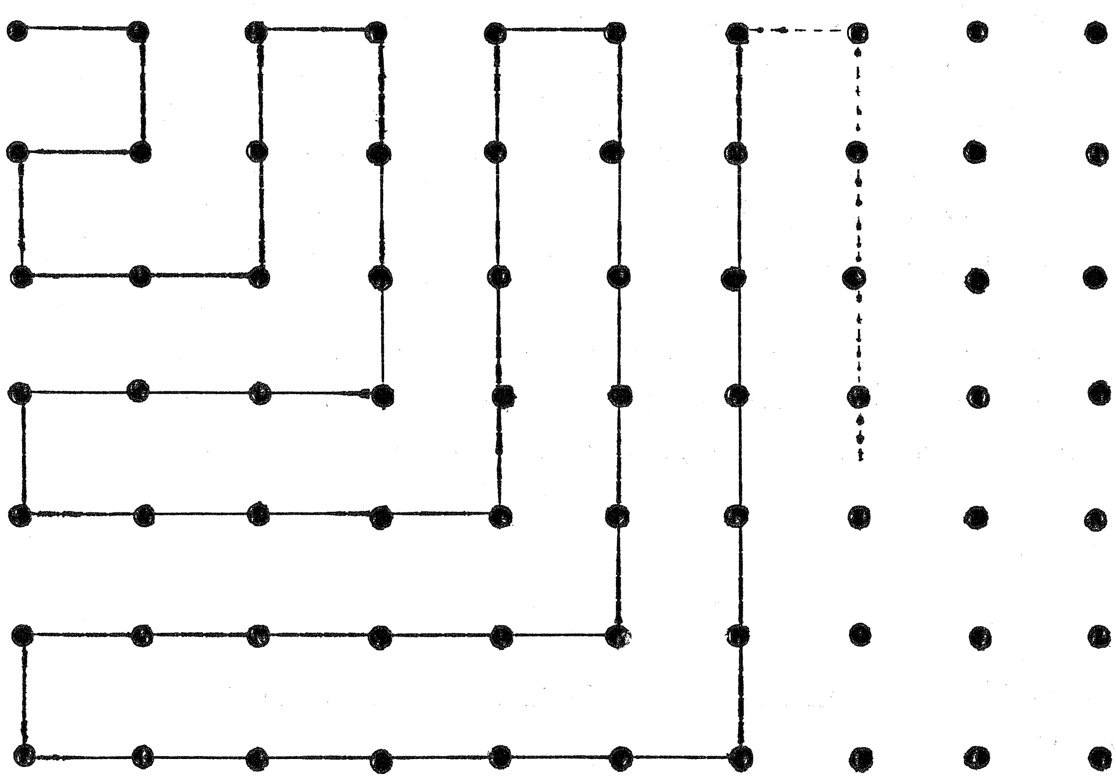

Schéma I

LE SCHEMA I CORRESPOND A LA SUITE:

(0,0) [1]	2 0	0 4	4 0	3 5	4 6
1 0	3 0	1 4	5 0	2 5	5 6
1 1	3 1	2 4	5 1	1 5	6 6
0 1	3 2	3 4	5 2	0 5	6 5
0 2	3 3	4 4	5 3	0 6	6 4
1 2	2 3	4 3	5 4	1 6	6 3
2 2	1 3	4 2	5 5	2 6	6 2
2 1	0 3	4 1	4 5	3 6	6 1
					6 0
					⋮

Cette suite que nous noterons X , peut se décomposer en deux sous-suites A et B comprenant respectivement toutes les premières composantes et les secondes composantes de chaque terme de X.
Un examen attentif de cette suite nous révèle une certaine régularité; par exemple la sous-suite A se décompose en tranches:

Tranche 0	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
0	0	0	0
1	1	1	1
1	2	2	2
0	2	3	3
	2	4	4
	3	4	5
	3	4	6
	3	4	6
	3	4	6
	2	5	6
	1	5	6
	0	5	6
		5	6
		5	.
		5	.
		4	.
		3	
		2	
		1	
		0	

La tranche 3 est incomplète; en se basant sur le développement des tranches précédentes, on peut induire les termes qui manquent:

7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0

En se basant sur l'ordre habituel des nombres naturels il est possible d'engendrer la suite X ... Reste à décrire d'une façon succincte le processus de génération. Nous avons vu précédemment que la suite A se subdivise en tranches qui possèdent toutes la même structure. En effet la tranche 0 est constituée par la suite des deux premiers nombres naturels suivie de cette même suite dans l'ordre réciproque. Cependant cette description ne convient pas à la tranche 1. Il faudrait trouver des traits communs pour chacune des tranches. Par exemple chaque tranche comporte un"sommet" 1 pour la tranche 0 3 pour la tranche 1 et 5 pour la tranche 2.

Les sommets de chaque tranche sont des nombres impairs; chaque tranche comporte des répétitions de termes:

- Un terme T du"sommet" est répété (T +1) fois. Par exemple le "5" de la tranche 2 est répété six fois.
- Il en est de même pour le terme qui précède les termes du sommet.

En résumé:

1. Chaque tranche comprend un "sommet" du type (2n+ 1)= N où n désigne le rang de la tranche considérée.
2. Chaque tranche comprend
   a) la suite des (N - 1) premiers nombres naturels suivie
   b) de la suite de (N - 1) fois le nombre (N - 1) suivie
   c) de la suite de (N +1) fois le nombre N suivie
   d) de la suite de N - 1 premiers nombres naturels dans l'ordre réciproque.

Pour simplifier posons

i) ι (N) = 0 1 2 3 ... (N-1) (1)

ii) N ρ M = N fois le nombre M

iii) ϕ ι (N) = (N-1)...3 2 1 0

iv) , signifie "suivie de "

A l'aide de cette dernière notation on peut abréger la description de toute tranche par ι (N) , (N-1)ρ (N-1) ;(N +1)ρ N , ϕ ι (N)

---

(1) Ceux qui sont familiers avec les langage machine, auront sans doute reconnu les notations du langage APL.

Par exemple pour la tranche 1 on aurait

n = 2 et N = 5 et

ι (5) , 4 ρ 4, 6 ρ 5, ϕ ι (5) , c'est-à-dire

0 1 2 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 4 3 2 1 0

La sous-suite B possède exactement la même structure que A sauf que les sommets de chacune de ses tranches sont de la forme 2 n = N.

Supposons que l'on veuille écrire les Y premiers termes de la suite X.

Le tableau suivant nous fournit les détails requis pour la confection de cette suite:

Tranches	Nombres de termes par tranches	Sommets	Cumul des termes
0	4 (1 × 4)	1	4
1	12 (3 × 4)	3	16
2	20 (5 × 4)	5	36
3	28 (7 × 4)	7	64
4	36 (9 × 4)	9	100

Le tableau nous indique qu'une suite de termes requiert 5 tranches consécutives. Il suffit de rechercher une relation entre le terme de la 4e colonne du tableau et le terme correspondant de la 3e colonne.

100 = (1 × 4) + (3 × 4) + (5 × 4) + (7 × 4) + (9 × 4)

= (1 + 3 + 5 + 7 + 9) × 4

= 25 × 4

Donc 100 ÷ 4 = 25 et 25*.5 = 5 = nombre de tranches. (1)

Comme la suite des sommets des tranches coïncide avec la suite de nombres impairs, on peut déterminer le sommet de la dernière tranche par la formule 2n + 1 où n désigne le nombre de tranches; pour 5 tranches nous avons donc le sommet 11.

En résumé la production de 100 termes requiert une chaîne de 5 tranches c'est-à-dire une chaîne de tranches dont les sommets varient de 1 à 9.

---

(1) 25*.5 signifie la racine carrée de 25

Voici les étapes à suivre:

1) Poser N = 1
2) Poser A = 0
3) Poser A = A, ι N , (N - 1) ρ (N - 1) , (N + 1) ρ N , ϕ ι (N)
4) Poser N = N + 2
5) Si N > 9 , écrire la suite A (moins le 1er terme)
6) Aller à l'instruction 3.

Si l'on désire obtenir les 115 premiers termes de X
115 ÷ 4 = 28.75
28.75*.5 = 5.3619026 = ⌈ 5.3619026 = 6
On aura alors 6 tranches pour un total de 36 × 4 = 144 termes
5 tranches porduisent 25 × 4 = 100 termes.
Il suffira donc d'écrire les 15 premiers termes de la 6e tranche.

Voici la suite des instructions modifiées en conséquence.

1) Poser N = 1
2) Poser A = 0
3) Poser A = A , ι N , (N - 1) ρ (N - 1) , (N + 1) ρ N , ϕ ι N
4) Poser N = N + 2
5) Si N > 11, écrire la suite A [ι 114] (moins le premier terme)
6) Aller à l'instruction 3.

La série d'instructions suivantes produira une suite de T termes:

1) Poser Y = 2 (⌈ (T ÷ 4) * 5) - 1
2) Poser N = 1
3) Poser A = 0
4) Poser A = A , ι N , (N - 1) ρ (N - 1) , (N + 1) ρ N , ϕ ι N
5) Poser N = N + 2
6) Si N > Y, écrire la suite A [ι (T + 1)] , moins le 1er terme)
7) Aller à l'instruction 5.

Voici maintenant la série d'instructions destinées à produire la sous-suite B:

1) Poser N = 2
2) Poser B = 0

3) Poser B = B ,ι N , (N-1) ρ (N-1) , (N + 1) ρ N ,φ ι N

4) Poser N = N + 2

5) Si N > Y + 1 , écrire B [ι T] (1)

6) Aller à l'instruction 3.

Pour obtenir la suite X, il suffit de juxtaposer les suites A et B et de les écrire en colonnes.

Voici donc la série d'instructions permettant de produire une suite X de T termes :

1) Poser Y = 2 (⌈ (T ÷ 4) * 05) - 1

2) Poser N = 1

3) Poser A = 0

4) Poser A = A , ι N , (N - 1) ρ (N - 1) , (N + 1) ρ N , φ ι N

5) Poser N = N + 2

6) Si N > Y , aller à l'instruction 8

7) Aller à l'instruction 4 // 8) Poser N = 2

9) Poser B = 0

10) Poser B = B , ι N , (N - 1) ρ (N - 1) , (N + 1) ρ N , φ ι N

11) Poser N = N + 2

12) Si N > Y + 1 , aller à l'instruction 14

13) Aller à l'instruction 10

14) Poser X = A [ι (T + 1)] (moins le premier terme) , B [ι T]

15) Ecrire X sous formes de 2 rangées de T termes

16) Transformer ces deux rangées en deux colonnes.

Si l'on consent des modifications mineures dans la notation nous avons là un programme (en langage APL) destiné à produire une suite X (SCH1 T) selon le schéma 1, de T termes.

```
    ∇ X←SCH1  T
[1]   X←(2×(⌈(T÷4)*0.5))-1
[2]   N←1
[3]   A←0
[4]   A←A,(ιN), ((N-1)ρ(N-1)),((N+1)ρN),(φιN)
[5]   N←N+2
[6]   →(N>Y)/8
[7]   →4
[8]   N←2
[9]   B←0
[10]  B←B,(ιN),((N-1)ρ(N-1),((N+1)ρN),(φιN)
[11]  N←N+2
[12]  →(N>Y+1)/14
[13]  →10
[14]  X←((1↓A[ιT+1),(B[ιT]))
[15]  X←(2,T)ρX
[16]  X←⍉X
    ∇
```

```
      SCH1 100
0  0          7  2
1  0          7  3
1  1          7  4
0  1          7  5
0  2          7  6
1  2          7  7
2  2          6  7
2  1          5  7
2  0          4  7
3  0          3  7
3  1          2  7
3  2          1  7
3  3          0  7
2  3          0  8
1  3          1  8
0  3          2  8
0  4          3  8
1  4          4  8
2  4          5  8
3  4          6  8
4  4          7  8
4  3          8  8
4  2          8  7
4  1          8  6
4  0          8  5
5  0          8  4
5  1          8  3
5  2          8  2
5  3          8  1
5  4          8  0
5  5          9  0
4  5          9  1
3  5          9  2
2  5          9  3
1  5          9  4
0  5          9  5
0  6          9  6
1  6          9  7
2  6          9  8
3  6          9  9
4  6          8  9
5  6          7  9
6  6          6  9
6  5          5  9
6  4          4  9
6  3          3  9
6  2          2  9
6  1          1  9
6  0          0  9
7  0
7  1
```

L'expression SCH1 100 (à droite) équivaut à la production des 100 premiers termes de la suite X selon le schéma 1.

Si l'on connaît $(N,\leq)$ il est possible d'engendrer $(N \times N, "\trianglelefteq")$ au moyen d'un algorithme tel que SCH1. D'autres questions se posent:

- Etant donné un terme quelconque de SCH1, peut-on trouver le suivant? le précédent?
- Trouver une bijection $N \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Déduire d'autres ordres sur $N \times N$.

Cette exploration naïve tend également à montrer que l'ordinateur est d'un grand secours dans la confection des listes de couples. De plus on constate qu'il est relativement simple de construire des programmes d'exécution.