LE CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

SECTION SECONDAIRE

PROBLEMES ET SOLUTIONS

par: *Jean Turgeon*
Département de mathématiques
Université de Montréal

Nous présentons ici le questionnaire et le solutionnaire du dernier concours mathématique du Québec, section secondaire. Ce concours avait d'abord été annoncé pour le 4 mars mais, à cause des circonstances, il a dû être reporté au 18 mars.

Les solutions présentées ici sont celles du comité de rédaction du concours. Nous comptons bien en trouver de plus élégantes et de plus ingénieuses dans les cahiers des étudiants! Comme en 1974 et en 1975, nous avons l'intention d'accorder quelques "prix de beauté" pour les réponses les plus remarquables.

Nous avons ajouté cette année au questionnaire quelques mots d'introduction, qui visaient à rassurer les étudiants. Ces derniers sont habitués à des examens, où ils se sentent remis en cause et craignent toujours l'échec. Un concours, c'est autre chose: c'est une occasion de se faire valoir et, espérons-le, de s'amuser un peu!

Je profite de l'occasion pour remercier Michel Boyer, Hélène Decoste, ainsi qu'André et Gilbert Labelle, qui ont rédigé le questionnaire avec moi. Johanne Beausoleil et Thérèse Ouellet ont vu à mener à bonne fin avec patience et compétence toute l'organisation matérielle du concours, qui est considérable. Yolande Leblanc et Jean Vernier ont fourni de précieux conseils. Merci enfin à tous ceux qui ont vu à la réalisation du concours au niveau des écoles et des commission scolaires!

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

1976

Le 18 mars 1976 14:00 - 17:00

Le concours mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler parmi la population étudiante les meilleurs talents en mathématiques. Pour que ces grands talents puissent se détacher nettement de la masse des autres, le questionnaire est abondant et varié à la fois quant au genre de question et au degré de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il ne peut répondre à plus de quatre ou cinq questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce qu'un étudiant moyen fournisse 4 bonnes réponses ou moins et que les bons étudiants en donnent 5 ou 6. Si vous en trouvez 7 ou 8, vous êtes excellent en mathématiques; seuls quelques génies en donneront 9 ou 10. Bonne chance!

Remarques:

1. Les quatre premières questions sont à choix multiples. Veuillez répondre par A, B, C ou D, sans autres explications.
2. $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier positif n.
3. $\sqrt{18\,496} = 136$

1. LE PROBLÈME DES ROBINETS.

Si 25 robinets semblables que l'on fait couler à 25% de leur rendement 35 heures par semaine pendant 3 semaines fournissent 30 tonnes de liquide, combien donneront 10 de ces robinets ouverts à 70%, 45 minutes par jour pendant 50 jours ?

A. 22.86 tonnes

B. 12 tonnes

C. 15 tonnes

D. Autre chose

2. LA RÉUNION DE FAMILLE

Pour le réveillon de Noël chez les Boisvert, on n'avait invité que des proches parents. Ne considérant que les relations entre personnes présentes, il y avait exactement un grand-père, une grande-mère, deux couples mariés, deux pères, deux mères, un oncle, quatre frères, deux neveux, quatre fils et deux petits-fils. Mme Boisvert avait invité le moins de monde possible. Combien de personnes en tout ?

A. 6 C. 15

B. 7 D. 19

3. LE PROBLÈME DE BABAO

Pour tout nombre réel x, désignons par Ax le nombre $x+1$ et , si $x \neq 0$ désignons par Bx le nombre $1/x$. En partant du nombre 0, on peut écrire le nombre 4 sous la forme AAAA0 et le nombre $7/5$ sous la forme ABAABAA0. En partant du nombre 0, exprimer de cette façon le nombre $29/16$.

A. BABAAAABAABA0

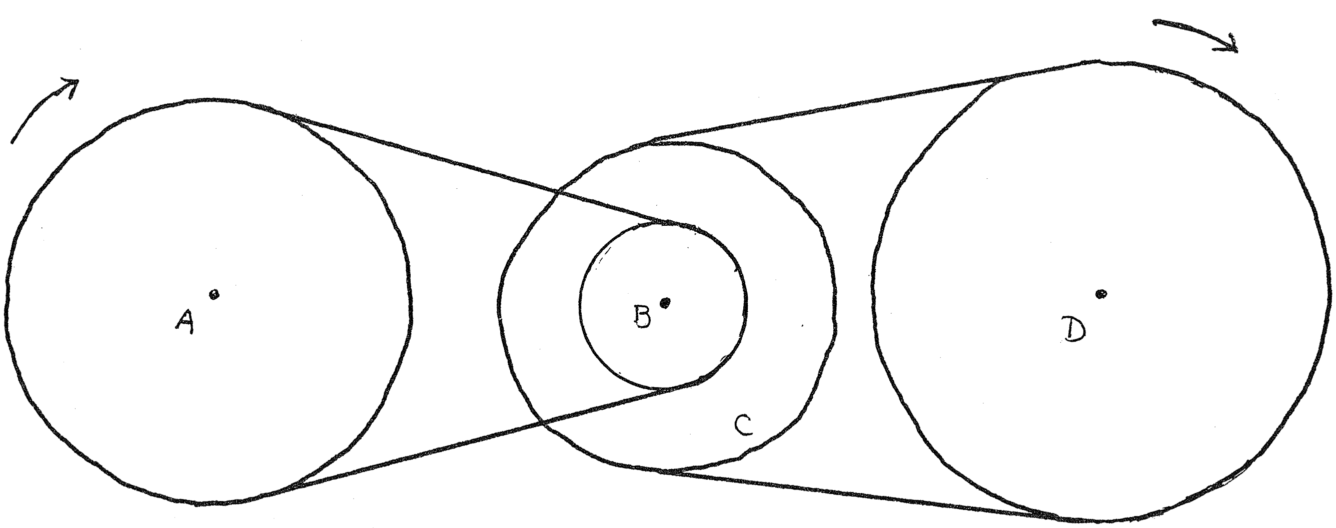
B. ABAABAAABBAA0

C. ABABAAAABAAA0

D. ABABAAABABAA0

4. LE PROBLÈME DES ROUES ET DES COURROIES

Les roues A, B, C et D ont des rayons de longueur 5, 2, 4 et 6 centimètres respectivement.



Les roues B et C ont même axe et sont solidaires. Les roues A et C sont reliées aux roues B et D respectivement par des courroies qui ne glissent pas. Si la roue A fait 6 tours, combien de tours fera la roue D ?

A. 6 C. 5

B. 10 D. Autre chose

5. LE PROBLÈME DES ÂGES ET DES CHANDELLES

La mère de Jean et de Jeanne a conservé les chandelles de leurs gâteaux de fête depuis leur naissance. Sachant que toutes les chandelles sont différentes, qu'il y en a 367 en tout et que Jean a 10 ans de plus que Jeanne, déterminer l'âge des deux enfants (relire la remarque 2).

6. LE PROBLÈME DES BASES EN NUMÉRATION

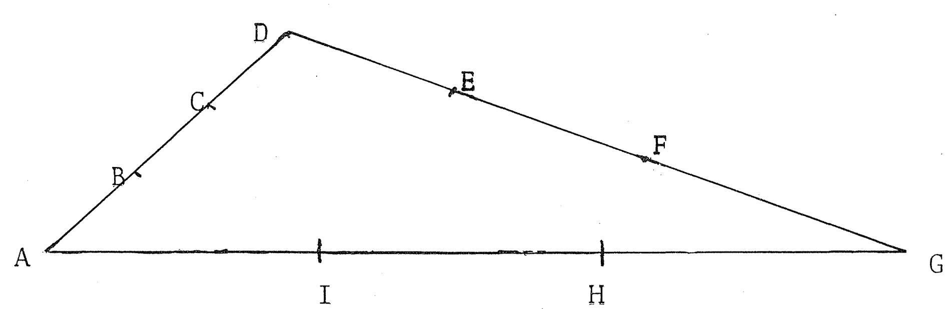
Trouver des chiffres a, b et c tels que

$$(abc)_5 = (cba)_7$$

c'est-à-dire tels que le nombre abc en base 5 soit égal au nombre cba en base 7. Donner toutes les solutions.

7. LES NOMBRES SUR LE TRIANGLE

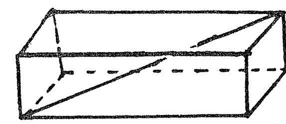
Dans la figure suivante, remplacer les lettres par les nombres de 1 à 9



(remplacer deux lettres différentes par deux chiffres différents) de façon que la somme des quatre chiffres d'un même côté soit toujours 20. On appelle "paires intérieures" les ensembles {B,C} , {E,F} et {H,I} . Noter que {B,C} ={C,B} ,{E,F} ={F,E} et {H,I } ={I,H }. Dans chaque solution du problème les trois paires intérieures sont remplacées par trois paires de chiffres. On dira que deux de ces solutions sont "essentiellement différentes" si elles n'ont pas plus d'une de ces paires de chiffres en commun. Trouver toutes les solutions essentiellement différentes.

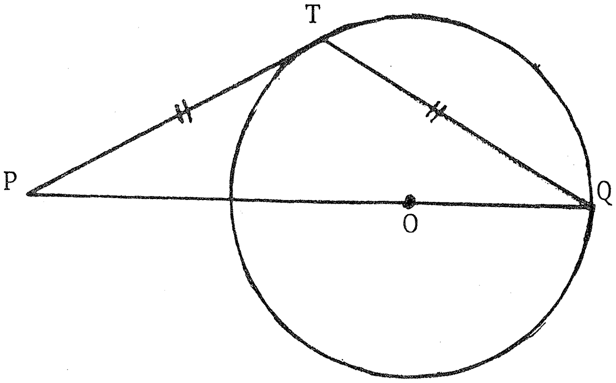
8. LE PROBLÈME DES TIGES SOUDÉES

A l'aide de 13 tiges de métal que l'on a soudées à leurs extrémités, on construit une "boîte" semblable à celle de la figure ci-contre. Tous les angles sont droits, sauf ceux qui sont formés par la tige AB, qui sert à solidifier la structure. Sachant que la longueur totale des 13 tiges est de 23 centimètres et que la somme des aires des 6 faces de la boîte est de 16 centimètres carrés, déterminer la longueur de la tige diagonale AB (relire la remarque 3).



9. LE PROBLÈME DE LA TANGENTE ET DE LA CORDE

Le segment PT est tangent au cercle de la figure au point T. Sachant que le segment PQ passe par le centre O du cercle et que PT = TQ = 1, trouver le rayon du cercle.



10. LE PROBLÈME DU TRANSPORT

Les entrepôts A et B contiennent, respectivement, 75 et 125 caisses de marchandise. Ces caisses sont toutes semblables. On doit les livrer à cinq clients, qui en demandent, respectivement, 82, 32, 12, 22 et 52. La compagnie de transport a un tarif fixe, à l'unité, indiqué par le tableau suivant:

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4	Client 5
Entrepôt A	5	21	24	12	6
Entrepôt B	7	14	15	8	9

Ainsi il coûte \$8.00 pour faire transporter une caisse de l'entrepôt B au client 4. Combien devrait-on expédier de caisses de chaque entrepôt à chaque client pour minimiser le coût total de la livraison? Quel sera ce coût total minimum?

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

1976

S O L U T I O N S

1. LE PROBLÈME DES ROBINETS

Soit x le nombre de tonnes de liquide fourni par un robinet ouvert à 100% pendant une heure. On a alors

$$(25x)\left(\frac{25}{100}\right)(35)(3) = 30 \quad \text{où} \quad x = \frac{8}{175}.$$

Dans la deuxième situation décrite il coulera donc

$$10\left(\frac{8}{175}\right)\left(\frac{70}{100}\right)\left(\frac{3}{4}\right)(50) = 12$$

tonnes de liquide. La réponse B est donc la bonne.

2. LA RÉUNION DE FAMILLE

Il fallait répondre B. Les personnes présentes au réveillon de Noël étaient M. et Mme Boisvert, leurs deux fils, ainsi que le père, la mère et un frère de M. Boisvert

	M.Boisvert	Mme Boisvert	1er fils	2e fils	Père de M.Boisvert	Mère de M.Boisvert	Frère de M.Boisvert
Un grand-père					X		
Une grand-mère						X	
Deux couples mariés	A	A			B	B	
Deux pères	X				X		
Deux mères		X				X	
Un oncle							X
Quatre frères	X		X	X			X
Deux neveux			X	X			
Quatre fils	X		X	X			X
Deux petits-fils			X	X			

3. LE PROBLÈME DU BABAO

La bonne réponse est C puisque

ABABAAAAB AAAO = ABABAAAA B 3

= ABAB AAAA 1/3

= ABA B 13/3

= AB A 3/13

= A B 16/13

= A 13/16

= 29/16 .

4. LE PROBLÈME DES ROUES ET DES COURROIES

Le périmètre de chaque roue étant proportionnel à son rayon, une roue qui entraîne, comme A et C, le fait proportionnellement à son rayon, tandis qu'une roue entraînée fait un nombre de tour inversement proportionnel à son rayon, i.e. elle fait d'autant moins de tours qu'elle est plus grande. Le nombre de tours de la roue D sera donc

$$6 \times \frac{\text{rayon de A}}{\text{rayon de B}} \times \frac{\text{rayon de C}}{\text{rayon de D}} = 6 \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{6} = 10.$$

5. LE PROBLÈME DES ÂGES ET DES CHANDELLES

Soit x l'âge de Jeanne. Alors Jean a $(x+10)$ ans et on a

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{(x+10)(x+11)}{2} = 367,$$

d'après la formule fournie. Après simplification, on obtient l'équation

$$x^2 + 11x - 312 = 0$$

dont les racines sont 13 et -24. Jeanne a donc 13 ans et Jean en a 23.

6. LE PROBLÈME DES BASES DE NUMÉRATION

La relation $(abc)_5 = (cba)_7$ peut s'écrire

$$25a + 5b + c = 49c + 7b + a,$$

où a, b et c sont des entiers entre 0 et 5. Comme $25a + 5b + c < 125$, on doit avoir

$$49c < 125, \text{ i.e. } c = 1 \text{ ou } 2$$

Si $c = 1$, on a

$$25a + 5b + 1 = 49 + 7b + a$$

ou

$$24a - 2b = 48, \text{ i.e. } 12a - b = 24.$$

Donc $a = 2$ et $b = 0$. Si $c = 2$, alors

$$25a + 5b + 2 = 98 + 7b + a$$

ou

$$24a - 2b = 96, \text{ i.e. } 12a - b = 48.$$

Donc $a = 4$ et $b = 0$. Les deux seules solutions sont donc

$$(201)_5 = (102)_7 \ [=(51)_{10}] \quad \text{et} \quad (402)_5 = (204)_7 \ [=(102)_{10}].$$

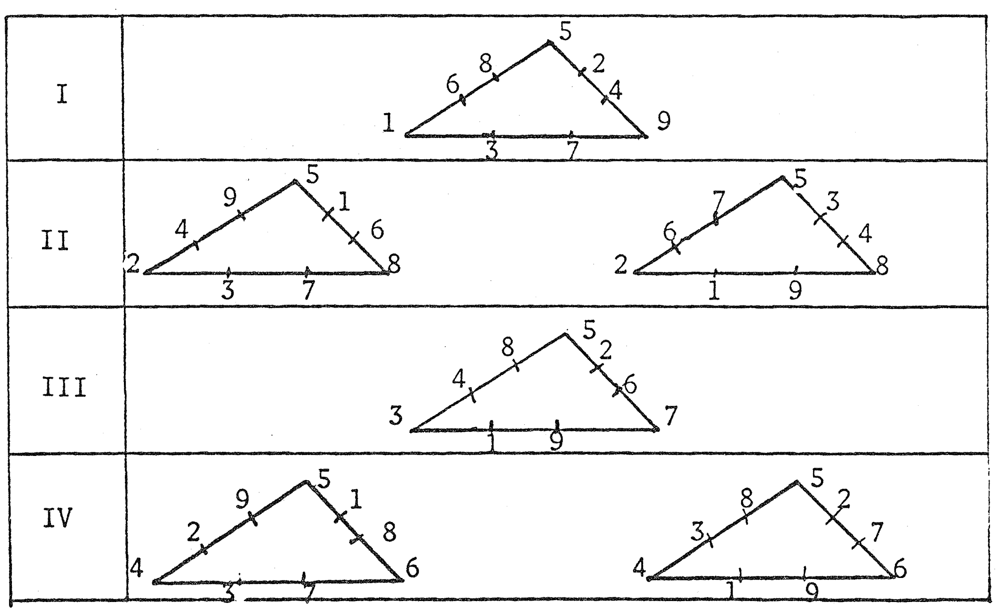
7. LES NOMBRES SUR LE TRIANGLE

Les sommes prises sur les côtés du triangle sont toujours 20. La somme des trois côtés est donc 60. Dans cette somme des trois côtés, les nombres placés aux sommets sont comptés deux fois et les autres une seule fois. Comme

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	X				X				X
II		X			X			X	
III			X		X		X		
IV				X	X	X			
V	X					X		X	
VI		X				X	X		
VII		X		X					X
VIII			X	X				X	

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

la somme des nombres placés sur les sommets sera 15. Il y a huit façons d'obtenir la somme 15 en prenant trois nombres différents entre 1 et 9, comme l'indique le tableau ci-contre. Considérant ces huit cas un à un, on constate que les quatre premiers donnent les solutions suivantes, qui sont "essentiellement différentes" les unes des autres.



Dans le cas V, le côté qui contient 6 et 8 contiendra aussi 4 et 2, forcément. Pour le côté qui contient 1 et 8, il faut choisir dans les nombres qui restent, i.e. dans l'ensemble $\{3,5,7,9\}$, deux nombres dont la somme soit 11. Comme c'est impossible, le cas V ne fournit aucune solution. On montre de même que les cas VI, VII et VIII ne fournissent aucune solution.

8. LE PROBLÈME DES TIGES SOUDÉES

Soit x la longueur de la tige AB et soient a,b et c la largeur, la hauteur et la profondeur de la boîte. Par le théorème de Pythagore, on a la relation

$$x^2 = (a^2 + b^2) + c^2.$$

La longueur totale des 13 tiges est

$$x + 4\ (a + b + c) = 23$$

et la somme des aires des 6 faces est

$$2(bc + ac + ab) = 16.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a + b + c)^2 - 2(bc + ac + ab) \\ &= \left(\frac{23-x}{4}\right)^2 - 16, \end{aligned}$$

d'où on obtient l'équation

$$15x^2 + 46x - 273 = 0,$$

dont les racines sont 3 et $-91/15$. La longueur de la tige AB est donc de 3 centimètres.

9. LE PROBLÈME DE LA TANGENTE ET DE LA CORDE

Soit R le point où la droite PQ rencontre le cercle de nouveau. Tracer les segments TR et TO. Alors l'angle OTP est droit, puisque PT est tangent au cercle. L'angle RTQ aussi est droit, puisque RQ est une diagonale du cercle. Les angles TPO et TQR sont égaux, étant à la base du triangle isocèle TPQ. Donc les triangles TPO et TQR sont égaux. Soit r le rayon du cercle. Alors

$$r = OQ = OR = RT.$$

Par le théorème de Pythagore, on a la relation

$$(2r)^2 = 1^2 + r^2, \text{ i.e. } \quad r = \sqrt{\frac{1}{3}}\ .$$

10. LE PROBLÈME DU TRANSPORT

Pour chaque client, on peut réaliser une économie en choisissant un entrepôt plutôt que l'autre. Mais cette économie est plus considérable pour certains clients que pour d'autres, comme l'indique le tableau ci-contre. On commencera donc par le client par lequel le choix entre les entrepôts A et B aura le plus d'effet sur le coût total de l'opération. Dans notre cas, c'est le client 3, à qui on expédiera 12 caisses depuis l'entrepôt B, économisant par ce choix $9.00 par caisse. On passera ensuite au client 2, pour lequel on économise $7.00 par caisse en choisissant l'entrepôt B. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'un des entrepôts soit vidé et on enverra le reste des caisses depuis l'autre entrepôt. La solution ainsi obtenue est représentée par le tableau suivant, qui indique combien de caisse on doit expédier de chaque entrepôt à chaque client.

Client	Economie dépendant du choix de l'entrepôt
1	7 - 5 = 2
2	21 - 14 = 7
3	24 - 15 = 9
4	12 - 8 = 4
5	9 - 6 = 3

	Client 1 82	Client 2 32	Client 3 12	Client 4 22	Client 5 52
Entrepôt A 75	23	0	0	0	52
Entrepôt B 125	59	32	12	22	0

Le transport ainsi organisé coûte $1,644.00. Tout autre arrangement coûte plus cher.