Qu'est-ce que l'enseignement heuristique?

par: *Gilbert Paquette*[1]
Télé-université (Permama)[2]
Université du Québec à Montréal

L'enseignement heuristique tire son origine principalement des travaux de Max Wertheimer [1] et Georges Polya [2, 3, 4]. Jon L. Higgins [5] en a donné récemment une définition assez nette que l'on peut résumer ainsi:

- le contenu est présenté sous forme de problèmes
- l'activité de l'étudiant est maximisée: celui-ci est en état de recherche
- l'enseignant intervient par des questions qui incitent l'étudiant à utiliser des éléments de méthode pour la résolution des problèmes (des heuristiques); il favorise une certaine incertitude critique en encourageant des approches multiples aux solutions.

Pour concrétiser un peu, nous allons présenter trois dialogues qui illustrent autant de façons d'exploiter un même problème dans l'enseignement. Par la suite, nous comparerons ces démarches et nous terminerons par des commentaires de nature générale sur la résolution de problèmes dans l'enseignement.

---

1 L'auteur tient à remercier Jean-Guy Dufort et Vincent Godbout dont les critiques ont servi à améliorer ce texte.

2 Ce texte a été rédigé lors de la conception d'un élément de cours du programme Permama.

1. Un problème - trois stratégies pédagogiques

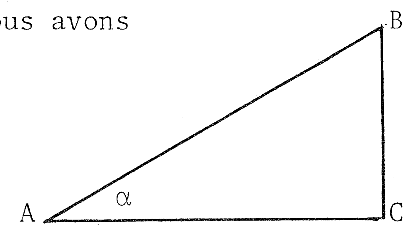
Voici trois façons d'utiliser le même problème de trigonométrie. Dans les trois cas, on suppose que les étudiants ont déjà "vu" la définition des fonctions trigonométriques et ont quelquefois utilisé ces fonctions pour trouver les angles et les longueurs des côtés de différents triangles rectangles dont on ne connaît que certains éléments.

Le professeur a choisi dans les trois cas de travailler avec toute la classe. Pour illustrer clairement les stratégies pédagogiques, nous allons décrire une démarche idéalisée[1] du groupe c'est-à-dire qu'on supposera, dans chaque cas, que tout a très bien fonctionné.

<u>Démarche A</u>

P: "Parmi les fonctions trigonométriques que nous avons étudiées, nous avons défini la fonction tangente comme suit:

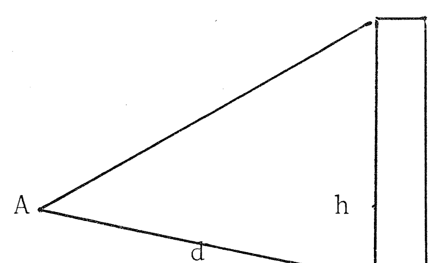
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AC}\text{''}.$$



E: (Acquiescent).

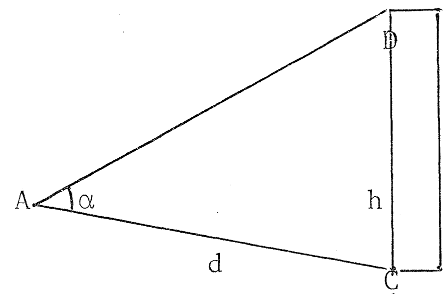
P: "Voici une application de la fonction tangente:

Un arpenteur se trouve au point A, en haut d'une pente au bas de laquelle se trouve l'édifice E. Il désire mesurer la hauteur h de l'édifice, connaissant la distance d qui le sépare, sur le sol, de la base de l'édifice. Il dispose également d'un appareil qui lui permet de mesurer l'angle entre deux points quelconques qu'il fixe à l'aide de sa lunette. Comment trouver la hauteur de l'édifice? Avez-vous une idée?"



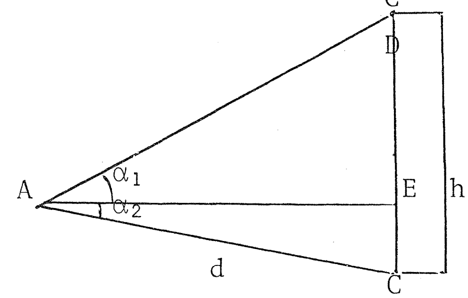
[1] En pratique, un dialogue réel aurait toutes les chances de combiner des éléments de ces trois démarches.

E: "On peut compléter le triangle comme suit et mesurer l'angle α."



P: "C'est un départ mais il faut trouver des triangles rectangles si on veut utiliser la fonction tangente.

P: "En fait, il suffira à l'arpenteur de placer sa lunette horizontale et de fixer ainsi un point E. Il pourra alors mesurer les angles α_1 entre D et E et α_2 entre E et C."



P: "Dans le triangle AEC, on trouve une partie de la hauteur

$\sin \alpha_2 = \frac{EC}{d} \Longrightarrow EC = d \sin \alpha_2$. On peut également trouver AE:

$\cos \alpha_2 = \frac{AE}{d} \Longrightarrow AE = d \cos \alpha_2$.

Résolvez maintenant le problème."

E: Les étudiants trouvent (?!)

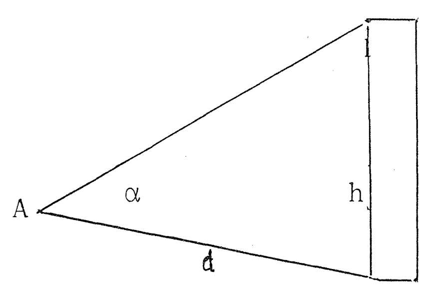
$$\mathrm{tg}\ \alpha_1 = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{d \cos \alpha_2} \Longrightarrow DE = d \cos\alpha_2\ \mathrm{tg}\ \alpha_1 \ .$$

$$\text{d'où, } h = DE + EC = d \cos \alpha_2\, \mathrm{tg}\ \alpha_1 + d \sin \alpha_2 \ .$$

Démarche B

P: (Il pose le problème sans l'introduction au sujet de la fonction tangente, puis demande:)
"Avez-vous des idées?"

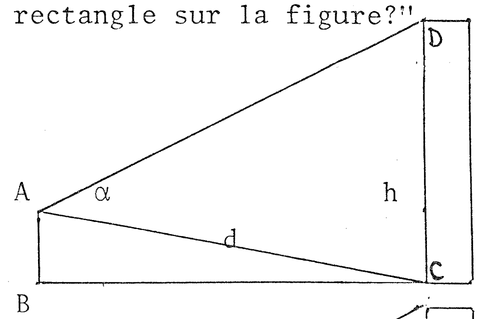
E: "On peut compléter le triangle comme suit et mesurer l'angle α."



P: "C'est un bon départ! Ce triangle est-il rectangle?"

E: "Non."

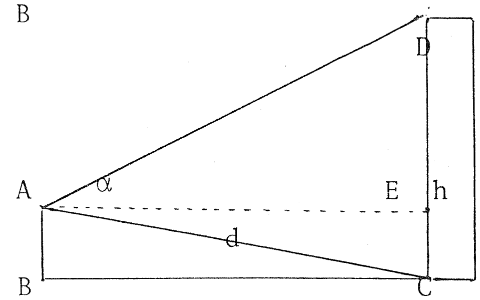
P: "Pouvez-vous faire apparaître un triangle rectangle sur la figure?"



E: "Oui, le triangle ABC."

P: "Bon! ... Mais comment calculer AB ou BC ... sans creuser de trous! "

E: (Rires).



P: "Essayez de reporter le segment AB à un endroit plus visible."

E: "Je l'ai! on mène une parallèle à BC , une droite horizontale et on a EC = AB . "

P: "Comment trouver EC?"

E: (...??...)

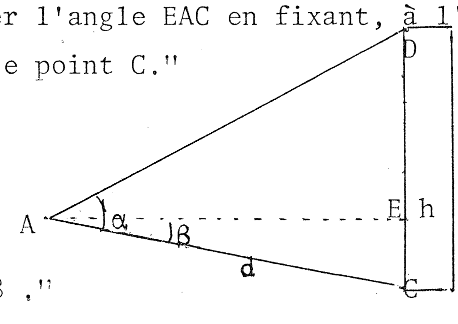
P: "Qu'est-ce que le triangle AEC a de particulier?"

E: "Il est rectangle."

P: "Combien faut-il d'éléments pour connaître tous les éléments d'un triangle rectangle?"

E: "Deux!... On en connaît un, AC = d ."

E: (un autre). Je l'ai! Il suffit de mesurer l'angle EAC en fixant, à l'aide de la lunette, un point horizontal E et le point C."



P: "Appelons-le β (il l'ajoute sur la figure). Peut-on trouver EC?"

E: "Oui! $\sin \beta = \dfrac{EC}{d}$ d'où $EC = d \sin \beta$."

P: "Très bien! On a là une partie de la hauteur h. Qu'est-ce qu'il reste à trouver?"

E: "DE"

E: (un autre)"et nous avons un autre triangle rectangle ADE pour le faire et $tg(\alpha - \beta) = \frac{DE}{AE}$ "

P: "Oui mais on ne connaît pas AE! "

E: (...)

P: "Y a-t-il un triangle qui permettrait de trouver AE?"

E: "Oui le triangle AEC. Avec sinus on avait EC, pour AE on a qu'à prendre le cosinus. $\cos\beta = \frac{AE}{d}$ d'où, $AE = d\cos\beta$."

P: "Quelqu'un peut-il compléter la solution?"

E: " On a $h = DE + EC$ d'où, $h = AE\,tg(\alpha-\beta) + d\sin\beta$ et enfin, en remplaçant AE par ce qu'on vient de trouver $h = d\cos\beta\,tg(\alpha-\beta) + d\sin\beta$."

<u>Démarche C</u>

P: (Comme dans la démarche B, il pose le problème sans introduction au sujet de la fonction tangente. De plus, il ne trace aucune figure au tableau).

E: (...)

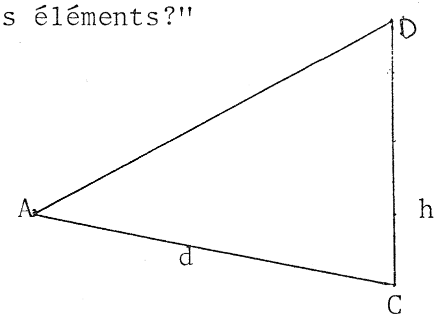
P: "Qu'est-ce qu'on cherche?"

E: "Une longueur, la hauteur de l'édifice!"

P: "Qu'est-ce qu'on connaît pour trouver cette longueur?"

E: "La distance de l'observateur au pied de l'édifice et des angles."

P: "Pouvez-vous tracer une figure de ces divers éléments?"



E: (Traçant la figure ci-contre.)

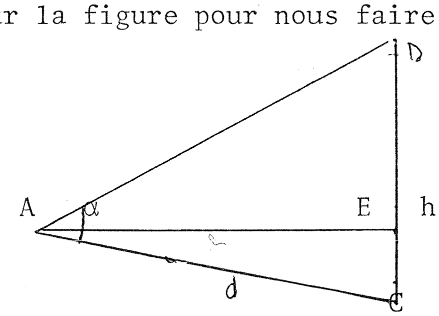
P: "Connaissez-vous des problèmes qui ressemblent à ça."

E: "Des problèmes avec des sinus ou des cosinus."

P: "Pouvez-vous en donner un exemple?"

E: "Oui! On a un triangle dont on connaît l'hypoténuse et un angle; on a à trouver les autres côtés. Mais le triangle doit être rectangle, ce qui n'est pas le cas ici!"

P: Pouvez-vous introduire d'autres éléments sur la figure pour nous faire avancer?"



E: "On peut tracer une horizontale AE. Cela nous donne deux triangles rectangles."

P: "Qu'est-ce qu'on va faire maintenant?"

E: (...)

P: "Qu'elle est l'inconnue?"

E: "DC"

P: "Pouvez-vous en trouver une partie?"

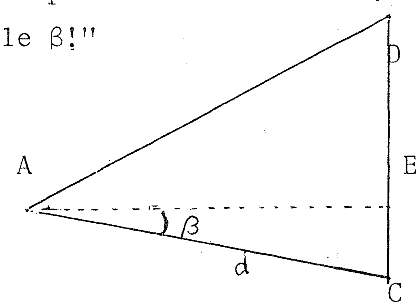
E: (...)

P: "Qu'elles sont les données que l'on peut connaître?"

E: "L'angle α, la longueur d."

P: "Y en a-t-il d'autres? Regardons l'énoncé.

E: (une autre). "Tous les angles en visant deux points sur l'édifice. Celui entre E et C, l'angle EAC! Appelons-le β!"



E: (un autre). Maintenant on peut trouver une partie de l'inconnue

$\sin\beta = \dfrac{EC}{d}$ d'où, $EC = d \sin\beta$."

P: "Pouvons-nous décomposer notre problème?"

E: "Oui! On a trouvé EC, il reste à trouver DE."

P: "Avons-nous ce qu'il faut?"

E: "On n'a qu'à mesurer de la même façon que β , l'angle entre D et E. Appelons-le γ et après ça va!"

P: Faites-le pour voir si ça marche!

E: "On a $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{DE}{AE}$ d'où, $DE = AE \operatorname{tg}\gamma$.
Ah oui! Mais il faut trouver AE. C'est facile! Par le théorème de Pythagore, on a déjà d et EC d'où $AE = \sqrt{d^2-(EC)^2}$.
C'est un peu compliqué!

$$AE = \sqrt{d^2 - (d \sin\beta)^2}$$

$$AE = \sqrt{d^2(1-\sin^2\beta)}$$

$$AE = d\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$AE = d \cos\beta$$

Finalement, puisque $DE = AE \operatorname{tg}\gamma$, on a : $DE = d \cos\beta \operatorname{tg}\gamma$."

P: (S'adressant à la classe.)
"Est-ce que c'est bien ça?"

E: (un autre)."Oui, mais on aurait pu aller plus vite pour trouver AE= d cos β , puisque dans le triangle AEC, $\cos\beta = \frac{AE}{d}$"

E: (un autre). "Les autres étapes sont faciles à vérifier" (Il récapitule.)

E: (un autre)."Ca dépend de notre possibilité de viser un point E qui soit horizontal avec A. C'est ce qui permet de décomposer le problème en deux"

P: "Essayons de voir s'il n'y a pas d'autres problèmes semblables que l'on pourrait résoudre par des méthodes analogues."

E: (Suggèrent divers problèmes dont l'un amènera peut-être le professeur à introduire la loi des sinus ou des cosinus pour leur faciliter la tâche.)

2. Comparaison des trois démarches

Dans la démarche A, on peut dire que le problème devient un EXERCICE D'APPLICATION de la définition de la fonction tangente. Les étudiants en sont d'ailleurs avertis par le professeur avant de commencer et celui-ci leur donne tous les éléments qui ne concernent pas l'application en question. On retrouve cependant un souci d'applications"concrètes".

Dans la démarche B, les étudiants ne savent pas au départ où le problème va les conduire mais ils sentent très vite que le professeur sait où il s'en va et va les guider vers une bonne solution. Il y a beaucoup d'échanges où le professeur se laisse un peu guider par les étudiants qui trouveront finalement une solution un peu différente de celle qu'il avait en tête. Ses interventions portent principalement sur le contenu du problème (faire apparaître un triangle rectangle, reporter le segment AB, on ne connaît pas AE!). Les questions sont posées de telle façon qu'au moins un étudiant pourra ajouter un élément de plus vers la solution. On peut qualifier cette démarche de DECOUVERTE GUIDEE.

Les étudiants sont nettement plus actifs que dans la démarche A. Cependant, ils doivent suivre à peu près la démarche prévue par le professeur. Quand ils s'en écartent, le professeur les y ramène par une question. On ne peut pas dire que les étudiants découvrent la solution mais ils en trouvent chaque élément mis en évidence par les questions du professeur.

Dans la démarche C, la principale différence tient au genre de questions que le professeur pose. Par exemple,

- Qu'est-ce qu'on cherche? (Quelle est l'inconnue?)
- Pouvez-vous en trouver une partie? (Pouvez-vous résoudre une partie du problème?)
- Faites-le pour voir si ça marche! (Mettez le plan à exécution!)
- Est-ce que c'est bien ça? (Pouvez-vous vérifier le raisonnement?)

Ces questions sont indépendantes du contenu spécifique du problème. Chacun vise à inciter l'étudiant à utiliser une heuristique générale, c'est-à-dire un élément de stratégie qui peut s'avérer utile dans la résolution d'un assez grand nombre de problèmes. Par exemple: "décomposer un problème en problèmes plus simples", "dessiner une figure" et "examiner des cas particuliers", sont probablement des heuristiques connues et utilisées par tout le monde. Il y a cependant nombre d'heuristiques moins connues et qui peuvent augmenter le pouvoir de résolution de problèmes de celui qui sait les utiliser.

Les interventions du professeur sont donc de nature méthodologique. C'est la caractéristique principale d'un ENSEIGNEMENT HEURISTIQUE.

Dans ce genre de démarche, le professeur ne cherche pas à imposer sa solution. Si une question n'aide pas les étudiants à compléter leur plan (par exemple:"Pouvez-vous en trouver une partie?"), le professeur pose d'autres questions heuristiques sans jamais "donner" l'élément de solution. On peut plus facilement parler de "découverte" de la solution" dans ce cas. Contrairement à un enseignement par "découverte guidée", il ne s'agit pas de deviner la solution que le professeur a en tête, mais de bâtir sa propre solution, le professeur pouvant aider sur le plan de la méthode.

3. La nécessité d'un enseignement heuristique

L'exemple que nous venons de présenter peut sembler sans conséquence, mais supposons un instant que l'on multiplie les activités de résolution de problèmes dans un contexte d'enseignement heuristique, sur des sujets mathématiques variés, Quel peut être l'impact sur les étudiants?

Résoudre des problèmes est au centre de l'activité mathématique. On a un peu tendance à l'oublier, peut-être parce que très souvent notre enseignement est centré sur des éléments de théorie élaborée par les mathématiciens qui nous ont précédé. Ceci n'est pas en soi surprenant, mais étant donné que nous sommes hors du contexte historique, l'activité de résolution de problèmes qui a donné naissance à ces théories nous échappe.

Par exemple, Euclide a étudié sa géométrie à partir des résultats connus des anciens. Ceux-ci avaient été obtenus en résolvant des problèmes pratiques de toisé concernant la subdivision et la mesure des terres, ou la construction d'édifices. De plus, en élaborant sa théorie, Euclide a été amené à résoudre d'autres problèmes plus théoriques dont la solution n'avait plus qu'à être formulée sous forme de théorème. Enfin, chaque preuve d'un théorème à partir des axiomes a constitué un autre problème: comment relier les hypothèses à la conclusion en utilisant uniquement les axiomes et les règles logiques.

Tous les concepts mathématiques actuels ont été développés au cours des siècles grâce aux apports successifs générés par les divers problèmes que les mathématiciens ont été amenés à résoudre. Pour prendre une image, on peut dire que la résolution de problèmes est le moteur de l'activité mathématique créatrice.

Or, la place qu'occupe la résolution de problèmes dans notre enseignement est relativement minime. Le principal rôle que joue le problème dans notre enseignement consiste presque uniquement à illustrer un élément de théorie et à consolider les techniques qui s'y rattachent au moyen d'exercices d'application.

Pourtant, résoudre des problèmes adaptés à son niveau de connaissance est une activité autrement plus riche que ne le laisse entrevoir les petits exercices d'application qu'on demande la plupart du temps aux étudiants.

Vous avez sans doute constaté à quel point, même après 12 ou 13 ans d'études en mathématique, ceux-ci peuvent être démunis devant tout problème légèrement différent de ceux pour lesquels ils possèdent un algorithme partiellement exercé. Même au niveau de la population en général, on constate que la vision de la mathématique qui s'est développée, réflète cet aspect mécanique. On la déteste, et plus rarement on l'aime, à cause de cet aspect assez secondaire de l'activité mathématique, qui consiste à poser des gestes sans trop de signification, uniquement pour satisfaire à des règles.

On ne peut, dès lors, se surprendre du peu de motivation des étudiants pour un sujet que les mathématiciens trouvent pourtant passionnant! L'activité des grands mathématiciens de l'histoire est d'abord et avant tout une activité créatrice dans laquelle intervient l'initiative, le jugement et la curiosité naturelle que manifeste toute personne qui reconnaît un défi dans un contexte stimulant. Mathématiciens et étudiants exercent souvent deux activités de nature diamétralement opposée que l'on ne peut justifier uniquement par une différence de développement intellectuel.

Cette contradiction de notre enseignement peut entraîner un certain nombre de conséquences sociales importantes: méconnaissance et rejet de cet outil d'analyse puissant qu'est la pensée mathématique; habitude de l'autoritarisme et acceptation des gestes mécaniques que l'on pose sans trop savoir pourquoi, tout simplement parce qu'on nous le demande; inhabilité et manque de confiance en soi devant un problème nouveau et donc tendance à le laisser à d'autres qui ont peut-être un algorithme à nous fournir; crainte de l'erreur et donc incapacité à construire une solution à partir de ses propres erreurs; connaissances mathématiques qu'on n'utilise pas ou que l'on a oubliées parce qu'elles ont été "apprises" par répétition en dehors de notre propre activité.

Ce sont ces effets néfastes, sur l'acquisition des connaissances, sur le développement intellectuel et affectif et sur l'attitude de l'individu face à la société, que l'on peut essayer d'éliminer au moins partiellement, par un enseignement qui valorise l'activité de l'étudiant.

Améliorer notre façon d'utiliser la résolution de problèmes dans l'enseignement peut contribuer à cet objectif global, en centrant l'école sur une formation de la pensée qui permet une acquisition significative des connaissances.

"Qui dit formation de la pensée, dit formation d'opérations et qui dit formation d'opérations dit construction d'opérations. La construction d'opérations se fait par la recherche et toute recherche part d'un problème"[6].

Il ne s'agit évidemment pas de demander à un jeune de recréer toute la mathématique ni de résoudre les problèmes complexes du mathématicien professionnel, mais il s'agit de recréer pour lui une atmosphère de recherche qui lui fera vivre, à son niveau de connaissances et de développement intellectuel, un peu de l'activité du mathématicien.

Bibliographie

[1] WERTHEIMER, Max , Productive Thinking, Harper and Row, N.Y. 1959.

[2] POLYA, G., Comment poser et résoudre un problème ? Dunod, Paris, 1965.

[3] POLYA, G., La découverte des mathématiques. Dunod, Paris, 1967.

[4] POLYA, G., Mathématique et raisonnement plausible. Gauthiers-Villars

[5] HIGGINS, Jon L., A New Look at Heuristic Teaching. The Mathematics Teacher Oct.1971, pages 487-495, NCTM.

[6] AEBLI, H., Didactique psychologique, page 80, Delachaux-Niestle, 1951.