TERMINOLOGIE

M 74 Induction, induction mathématique

Le terme "induction", qui s'oppose à "déduction", désigne la forme de raisonnement par laquelle on obtient une loi générale à partir de l'observation de plusieurs cas particuliers. Le raisonnement inductif part du concret pour aboutir à l'abstrait; il constitue le principal outil, pendant la phase "découverte", des sciences expérimentales. Le raisonnement déductif va, lui, de l'abstrait vers le concret et sert surtout à exposer les théories déjà construites.

Par "induction mathématique", on désigne souvent la méthode de preuve garantissant la validité de " $\forall n\, P(n)$" à partir de la vérification de

(a) $P(0)$

et de (b) $\forall n(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$.

Il s'agit-là d'un processus déductif, et non pas inductif. En effet, on considère un seul cas particulier: le cas $n = 0$ en (a). L'étape (b) montre ensuite que $\{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ est fermé sous l'opération de successeur. C'est à tort que l'on parle d'induction ici.

On suggère de remplacer "induction mathématique", "preuve par induction", par l'expression juste: "preuve par récurrence".

Remarque: L'induction existe en mathématiques, comme en toute science. Chaque fois que l'on explore un domaine nouveau, on commence par considérer des cas particuliers, c'est-à-dire par procéder inductivement. Ces cas particuliers nous incitent à énoncer des propriétés générales qui, en mathématique, sont ensuite vérifiées de façon déductive.

M75 Récurrence

On parle de récurrence (ou encore de propriété héréditaire) lorsqu'on procède en une suite d'étapes dont chacune dépend de la précédente. Ceci intervient principalement dans les deux contextes suivants:

- Preuve par récurrence:

Pour démontrer la validité de " $\forall n\ P(n)$", on procède en 2 étapes:

(a) On démontre $P(0)$.

(b) Admettant la validité de $P(n)$, on en déduit celle de $P(n + 1)$: formellement, on montre que

$$P(n) \longrightarrow P(n + 1).$$

L'hypothèse en (b) concernant la validité de $P(n)$ est dite hypothèse de récurrence.

- Définition par récurrence:

Pour définir un terme $t(n)$ dépendant de n, on procède en 2 étapes:

(a) On définit d'abord $t(0)$.

(b) Puis, supposant $t(n)$ déjà construit, on indique comment construire $t(n + 1)$ à partir de $t(n)$.

Exemple: $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + n$.

On obtient ainsi la suite formée de 0, 1, 3, 6, 10, 15...

La formule indiquant comment passer de $t(n)$ à $t(n + 1)$ est dite <u>formule de récurrence</u>. Dans l'exemple, il s'agit de l'égalité "$a_{n+1} = a_n + n$".

<u>Remarque 1</u>: Par abus, on parle encore de récurrence même si la $(n + 1)$-ième étape dépend non seulement de la n-ième mais également d'une ou plusieurs autres des étapes précédentes. Ainsi, la suite de Fibonacci (personnage connu en certains milieux sous le nom de Léonard de Pise), composée de

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...$$

est ainsi définie par récurrence:

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et } a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

<u>Remarque 2</u>: Dans une preuve par récurrence, la difficulté réside principalement dans le passage en (b) de n à $n + 1$. En général, la vérification (a) est très simple. Aussi est-on porté -- à tort de -- de la négliger. Ainsi,

$$9 \text{ ne divise pas } 10^n + 1$$

bien que

$$9|(10^n + 1) \longrightarrow 9|(10^{n+1} + 1).$$

(Cette dernière formule fournit un exemple d'un théorème de la forme $p \longrightarrow q$ dans lequel p et q sont tous deux faux.)