TERMINOLOGIE

Monsieur Nicolas Evreinow qui, depuis deux ans, assumait la présidence du Comité de Terminologie, a décidé de se retirer de ce poste, tout en continuant de participer au dit Comité à titre de membre. Monsieur Roch Ouellet a accepté de le remplacer et prend le Comité en charge.

M 68 Série de nombres réels

Rappelons (voir **P**$_5$) qu'une suite (infinie) de nombres réels est, par définition, une fonction $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. On identifie ordinairement la suite x et la famille

$$\langle x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$$

de ses images.

Une telle suite $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ détermine une série: on additionne les n premiers termes de la suite x; puis, laissant varier n, l'on introduit une nouvelle suite, la suite des sommes partielles:

$$\langle x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + \ldots + x_n, \ldots \rangle .$$

Exemple 1: $x_n = \frac{1}{2^n}$; alors $s_n = x_1 + \ldots + x_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

La suite des sommes partielles est

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, 1 - \frac{1}{2^n}, \ldots \right\rangle .$$

Exemple 2: $x_n = n$; alors $s_n = x_1 + \ldots + x_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

La suite des sommes partielles est

$$\left\langle 1, 3, 6, \ldots, \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \ldots \right\rangle .$$

Formellement, une série de nombres réels se présente comme la donnée de deux suites (infinies) $\langle x_n \quad 1\rangle$ et $\langle s_n \quad 1\rangle$ reliées par les formules équivalentes

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x_1 = s_1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

x_n est appelé le n-ième terme de la série.
s_n est appelé la n-ième somme partielle de la série.

Ordinairement, une telle série est notée (par abus) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ et est appelée série de terme général x_n.

Si la suite $\langle s_n \quad 1\rangle$ converge vers un nombre s_∞, on dit que la série converge vers s_∞ et que s_∞ est la somme de la série. On écrira souvent

$$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} x_n .$$

La différence $r_n = s_\infty - s_n$ est alors appelée reste d'ordre n.

Exemples: Reprenons les 2 exemples considérés précédemment.

1. Si $x_n = \frac{1}{2^n}$, alors $s_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$.

   La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge donc vers 1.

2. Si $x_n = n$, alors $s_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

   Comme s_n croît indéfiniment, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n$ de terme général n n'admet pas de somme. (On dit aussi qu'elle diverge.)

M69 Série de fonctions réelles

Les commentaires de M 68 s'étendent dans le contexte des fonctions réelles (ou complexes, etc.) définies sur un ensemble E.

Ainsi, une suite (infinie) de fonctions réelles sur E est une application f de $\mathbb{N}^*$ dans l'ensemble-puissance $\mathbb{R}^E$ des fonctions de E dans $\mathbb{R}$.

L'on identifie généralement cette suite f avec la famille

$$\langle f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots \rangle$$

de ses images.

Exemple 1: La suite $\langle f_n \quad 1 \rangle$ où

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^n$$

est constituée des fonctions suivantes:

$$f_1 : x \longmapsto x$$
$$f_2 : x \longmapsto x^2$$
$$f_3 : x \longmapsto x^3$$
$$\vdots$$

Une série de fonctions réelles sur E est la donnée de deux suites (infinies) $\langle f_n \quad 1 \rangle$ et $\langle S_n \quad 1 \rangle$ reliées par les formules équivalentes

$$S_n = f_1 + \ldots + f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$f_1 = S_1 \quad \text{et} \quad f_{n+1} = S_{n+1} - S_n .$$

Cette série est notée (par abus) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f_n}$. Remarquer que S_n est une fonction et que sa valeur en un élément e de E est

$$S_n(e) = f_1(e) + \ldots + f_n(e).$$

Exemple 2: Reprenons la suite $\langle f_n \quad 1 \rangle$ considérée lors de l'exemple 1:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^n.$$

Chaque f_n "est" un monôme. Et chaque S_n "est" un polynôme:

$$S_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x$$

$$S_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x + x^2$$

$$S_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x + x^2 + x^3$$

$$\vdots$$

$$S_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

$$\vdots$$

M 70 Convergence ponctuelle d'une série de fonctions réelles

Par définition, une suite infinie ne peut converger que vers un objet du même type. Ainsi, la limite d'une suite de fonctions réelles sur E, si elle existe, sera nécessairement une fonction réelle sur E.

Les mathématiciens utilisent plusieurs types de convergence pour les suites de fonctions: ponctuelle, uniforme, normale, ... Nous ne considérerons ici que la convergence ponctuelle.

On dit qu'une <u>suite</u> $\langle f_n \; 1 \rangle$ de fonctions réelles sur E <u>converge ponctuellement</u> vers f_∞ si et seulement si, pour tout élément du domaine E, la suite des valeurs en e

$$\langle f_1(e), \ldots, f_n(e), \ldots \rangle$$

converge vers $f_\infty(e)$.

<u>Exemple 1</u>: $E = \mathbb{R}$ et $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x}{n}$.

La suite $\langle f_n \; 1 \rangle$ converge ponctuellement vers la fonction constante $f_\infty : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 0$.

<u>Exemple 2</u>: $E = \left]-1, 1\right[$ et $S_n : \left]-1,1\right[\longrightarrow \mathbb{R} :$
$x \longmapsto 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

La suite $\langle S_n \quad 1 \rangle$ converge ponctuellement vers

$$S_\infty : \left]-1, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{1-x}.$$

De même, on dit qu'une <u>série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ <u>converge ponctuellement</u> si et seulement si la suite $\langle S_n \quad 1 \rangle$ de ses sommes partielles converge ponctuellement. La fonction limite est notée $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

<u>Exemple 3</u>: $E = \left]-1, 1\right[$ et $f_n : \left]0, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^{n-1}$.

Alors, S_n est la fonction

$$S_n : x \longmapsto 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

considérée dans l'exemple 2. La série $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge donc ponctuellement vers la fonction

$$\left]-1, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{1-x} .$$

M 71 <u>Suite, série indexées par $\mathbb{N}$.</u> <u>0-ième terme</u>

Il est souvent avantageux dans une suite ou une série de faire partir l'indice à 0 plutôt qu'à 1. Ainsi, la suite considérée dans l'exemple 2 de **M 70** comprend les fonctions

$$x \longmapsto x^0 \qquad\qquad (\text{rappel } x^0 = 1)$$

$$x \longmapsto x^0 + x^1$$

$$x \longmapsto x^0 + x^1 + x^2$$

$$x \longmapsto x^0 + x^1 + x^2 + x^3$$

$$\vdots$$

Observer le décalage entre le rang de la fonction et le degré du polynôme associé:

le polynôme x^0 de la première est de degré 0

le polynôme $x^0 + x^1$ de la seconde est de degré 1.

Afin d'éliminer ce décalage importun, on convient généralement d'affecter l'indice 0 à la première de ces fonctions, l'indice 1 à la seconde, etc. On obtient ainsi une famille $\langle T_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$, où

$$T_n : \left]-1, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^0 + \ldots + x^n.$$

On accorde (par abus) à cette famille $\langle T_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ le titre de suite, même si son ensemble d'indices est $\mathbb{N}$ et non pas $\mathbb{N}^*$. Egalement, on parlera de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ de terme général x_n. (Observer le "n = 0" sous le "$\sum$", qui remplace le "n = 1" utilisé pour les séries indexées par $\mathbb{N}^*$). Cet abus ne présente aucun inconvénient théorique puisque les ensembles ordonnés $\langle \mathbb{N}^*, \leq \rangle$ et $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ sont isomorphes. Aucun inconvénient pratique non plus puisque l'ensemble d'indices sera déterminé par le contexte (ou même la notation dans le cas des séries).

La suite $\langle T_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ comprend

$$T_0, T_1, T_2, \ldots$$

Afin de camoufler le décalage entre l'indice de T_n et son rang dans l'énumération ci-haut, on convient d'appeler

T_0	<u>le 0-ième terme</u>	de la suite $\langle T_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$
T_1	le premier terme	" " " "
T_2	le second terme	" " " "

De même, x^0 est dit 0-ième terme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

x^2 est dit second terme " "

<u>Remarque</u>. A cause de la présence éventuelle d'un 0-ième terme, il est inapproprié d'utiliser les notations

x_0 pour la limite de la suite $\langle x_n \quad 1 \rangle$

s_0 pour la somme de la série de terme général x_n.

On se servira plutôt de f_∞ et de s_∞ ; ou encore de f et de s; ou de toute autre notation convenant au contexte.

M 72 Développement en série

Un développement en série d'une fonction S_∞ est la représentation de S_∞ comme somme d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. (La série est, en pratique, toujours indexée par $\mathbb{N}$).

Exemples: Sur $]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Sur $\mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Sur $\mathbb{R}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.