EVOLUTION DU CONCEPT DE DERIVEE

par: Jean-Paul Collette
Cegep Montmorency

Rolle, dont le nom est lié au théorème de Rolle, publia en 1691 un livre de géométrie et d'algèbre intitulé "Méthode pour résoudre les égalités" dans lequel il est dit, en particulier, que si une fonction est différentiable dans l'intervalle de a à b, et si $f(a) = 0 = f(b)$, alors $\frac{df}{dx}$ possède au moins une racine réelle entre a et b.

La critique de Rolle vise directement les résultats du calcul en les considérant comme des faussetés ingénieuses provenant de méthodes qui conduisent à des paralogismes.

La publication de l'"Analyst" en 1734 de George Berkeley a profondément influencé la pensée mathématique en Angleterre durant plus d'un demi-siècle. L'attaque de Berkeley porte sur quatre points principaux: l'abandon des termes contenant des différentiels, le rapport des quantités évanouissantes, les différentielles d'ordre supérieur, la fluxion basée sur le concept de vitesse. Cette attaque a eu pour effet de provoquer l'apparition d'une trentaine d'articles (sur une période de sept ans) écrits dans le but de remédier à la situation en défendant Newton, le plus souvent. Le résultat de cette critique importante se reflète positivement dans l'éclaircissement des idées mathématiques reliées au calcul.

Non satisfait des quantités infiniment petites de Leibniz ni de la présentation d'Euler de "dx" comme zéro, ni des rapports premiers et ultimes de Newton qu'il considère être des rapports de quantités au moment où elles cessent d'être des quantités, J.L. Lagrange évite les infinitésimales et place la dérivée dans une position privilégiée. Parallèlement, il met l'emphase sur la notion de fonction.

Dans sa "Théorie des fonctions analytiques" (1797), il dit:
"... pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par f'x la

première fonction dérivée de fx, par f"x la première fonction dérivée de f'x, par f'''x la première fonction dérivée de f''x, et ainsi de suite". "Nous appellerons la fonction fx, <u>fonction primitive</u>, par rapport aux fonctions f'x, f''x, etc..., qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, fonctions dérivées, par rapport à celle-là". "... De la même manière, si y est supposé une fonction de **x**, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', etc." [1]

L'idée directrice de Lagrange consiste à développer les fonctions en séries de puissances et d'identifier les coefficients de la série obtenue avec les dérivées successives de la fonction. Cependant, Lagrange prenait pour acquis que toute fonction est développable en série, ce qui n'est pas vraie, et de plus, la question de la convergence des séries infinies appelle le besoin du concept de limite, ce qu'il voulait éliminer. Malgré ces deux aspects négatifs, il n'en demeure pas moins que la Théorie des fonctions de Lagrange constitue la plus importante contribution dans la recherche des bases logiques du calcul avant les travaux de Bolzano et de Cauchy.

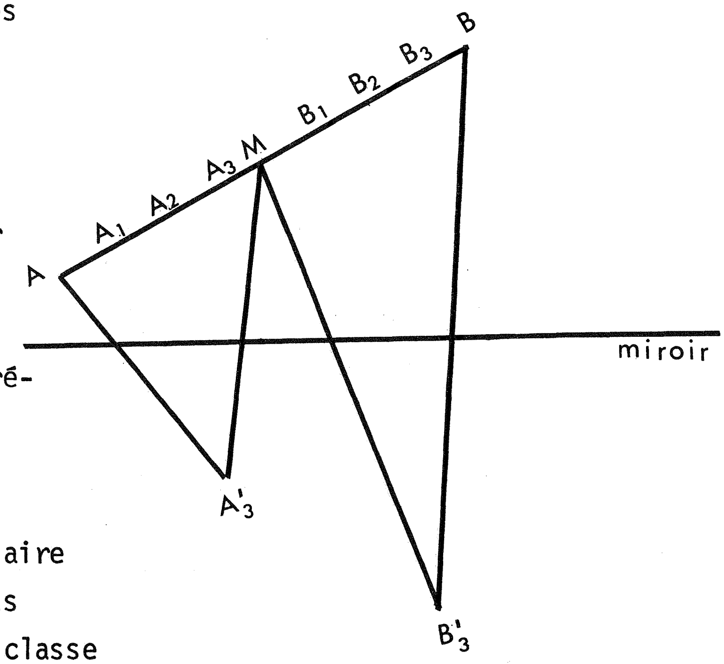
Bernard Bolzano (1781-1848), prêtre bohémien, philosophe et mathématicien, voulait éviter des considérations faisant appel à l'intuition dans l'élaboration de la nouvelle analyse. Ceci exigeait, au départ, une définition satisfaisante de la continuité qu'il énonce et dans laquelle les bases de la continuité se retrouvent dans le concept de limite. Il a défini la continuité de f dans un intervalle en disant que pour toute valeur de x dans cet intervalle, la différence $f(x + \Delta x) - (f(x))$ devient et reste plus petite que toute quantité donnée en autant que Δx soit suffisamment petit.

Bolzano, en présentant les éléments de calcul, réalise clairement l'importance de la dérivée exprimée en termes de la limite des rapports de différences. Il a défini ainsi la dérivée de f pour toute valeur de x comme la quantité f' dont le rapport $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x}$ s'approche infiniment près lorsque Δx approche zéro, Δx peut être positif ou négatif. Il a dépassé ses prédécesseurs en considérant le symbole $\frac{dy}{dx}$, non pas comme le rapport de dy sur dx ou le quotient de zéro divisé par zéro, mais bien comme l'expression d'une seule fonction. Il poursuit en soutenant qu'une fonction n'est pas déterminée en un point si elle se réduit à $\frac{0}{0}$. Cependant, elle

1- L'accent, à titre de marque pour la dérivée, apparaît dès 1759 dans un ouvrage de Lagrange.

peut posséder une valeur limite en ce point de discontinuité. En 1834, le mathématicien bohémien a fourni un exemple d'une fonction continue partout mais non différentiable en chaque point (voir figure ci-contre).

Voici AB, segment de droite, M point milieu, et AM et MB sont subdivisés en quatre parties égales.



Soit A'_3 et B'_3 les réflexions A_3 et B_3 . La ligne brisée $AA'_3\ MB'_3B$ sur laquelle on applique le même procédé que sur AB, va engendrer 16 segments de droite (4^2). En continuant ce procédé indéfiniment, l'ensemble des lignes brisées convergent vers une courbe représentant une fonction continue nulle part différentiable.

Bolzano met aussi en évidence le fait nécessaire de considérer la question de convergence dans les séries infinies. Il a défini ainsi une classe de séries comme suit: "... qui possède la propriété que la variation (augmentation ou diminution) subit par leur valeur à travers un prolongement des termes aussi loin que l'on désire, demeure toujours plus petite qu'une certaine valeur laquelle peut être choisie aussi petite que désirée, si on prolonge la série suffisamment loin" et alors il a prouvé que pour ces séries "... il existe toujours une certaine valeur constante, et certainement une seule, vers laquelle les termes des séries approchent le plus, et vers laquelle ils viennent aussi près que désiré, si on prolonge la série suffisamment loin".

Malgré que les idées de Bolzano indiquent la direction vers laquelle la formulation générale du calcul repose, ses idées ont exercé très peu d'influence car ses travaux demeurent largement inconnus pour ses contemporains (sauf possiblement Cauchy) avant d'être redécouverts par Hermann Hankel plus d'un demi-siècle plus tard. Cependant, A.L. Cauchy poursuit des idées semblables (presque indentiques parfois) vers la même époque et réussit à les établir comme bases satisfaisantes du calcul tout en laissant planer encore certaines imprécisions.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) a présenté ses idées sur le calcul dans trois ouvrages majeurs. Ce sont "Cours d'analyse à l'Ecole Royale Polytechnique" (Paris, 1821); "Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal" (Paris 1823); et "Leçons sur le calcul différentiel" (Paris 1829).

Cauchy rivalise avec Euler dans la production de travaux mathématiques. En effet, il publia pas moins de 800 livres et articles sur la plupart des sujets mathématiques de son époque. Ses oeuvres complètes parues à Paris, couvrent 25 volumes.

Ses définitions de limite et de continuité ressemblent beaucoup à celles de Bolzano. Il a défini la limite comme suit: "Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres". Cette définition rend compte exactement l'idée intuitive de la limite mais elle est verbale plutôt que numérique.

Il a énoncé aussi une définition de l'infinitésimal basée sur sa définition de limite: "Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite". Cette définition lui a permis entre autres choses, d'établir des ordres successifs d'infinitésimaux. Ainsi, toute quantité variable qui est telle que son rapport à α (un infinitésimal) possède une limite finie lorsque α décroît, peut être classifiée comme un infinitésimal du premier ordre et de façon similaire, toute variable dont le rapport à α^2 possède une limite finie lorsque α décroît est un infinitésimal du deuxième ordre, etc.

Il a utilisé de nouveau sa définition de limite pour définir la continuité: "La fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. On dit encore que la fonction f(x) est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit".

Sa définition est équivalente à celle qui affirme que f sera continue en a si f approche la limite f(a) lorsque x approche la limite a. Cependant, malgré que cette définition met l'accent sur le concept de limite, Cauchy croit encore, comme ses prédécesseurs, que toute fonction continue admet nécessairement une dérivée à cause probablement de son intuition géométrique qui lui joue des tours.

La définition de la dérivée, telle que formulée par Cauchy, correspond à celle énoncée par Bolzano et en diffère que par le remplacement de Δx par "i". Il en sera de même pour la question de convergence des séries infinies, la similitude reposant alors dans la condition générale de convergence.

Avec Cauchy (et Bolzano), les concepts importants du calcul différentiel et intégral reçoivent une formulation satisfaisante pour ne pas dire équivalente à la formulation moderne. Cependant, dans la présentation de Cauchy, certains liens logiques sont inexistants ou font défaut. Parmi ces lacunes, mentionnons l'absence d'une définition rigoureuse du "nombre", une conception vaporeuse du concept d'infini si indispensable à l'étude des séries infinies. Par conséquent, les successeurs de Cauchy, en particulier Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind et Georg Cantor, vont clarifier davantage les concepts de nombre, de continuité, de limite, de fonction, en introduisant l'"arithmétisation de l'analyse" d'une façon beaucoup plus intégrée que ne l'on fait Cauchy, Bolzano et leurs prédécesseurs.

Conclusion

Le calcul différentiel et intégral trouve son origine dans les tentatives des Grecs à exprimer leurs idées intuitives concernant l'infinitésimal, la continuité. La rigueur de la pensée grecque ne pouvait accepter le concept d'infinitésimal et le remplaça par la méthode d'exhaustion. Cependant, les problèmes de variation ne furent pas étudiés quantitativement par les Grecs et il faudra attendre les philosophes scholastiques du XIV^{e} siècle avant de voir apparaître des démonstrations graphiques exprimant l'aspect quantitatif de la variation.

Malgré que leur approche était surtout dialectique, les résultats obtenus vont rendre possible durant le XVII^{e} siècle l'introduction de la géométrie analytique et la représentation systématique des quantités variables.

L'application de ce nouveau type d'analyse avec l'usage de l'infinitésimal débouchent très rapidement aux algorithmes de Newton et de Leibniz. Cependant, à ce stade du développement, il n'existe pas de conception claire des bases logiques essentielles au calcul. Le XVIII^{e} siècle hésite, s'efforce, dans la mesure du possible, de rechercher ses bases et, malgré le peu de succès, il réussit quand même à libérer en grande partie le calcul des intuitions géométriques et du mouvement continu. Au tout début du XIX^{e} siècle, le concept de dérivée devient fondamental et avec les définitions rigoureuses du nombre et de la continuité (milieu du siècle) la fondation rigoureuse est maintenant complétée.