Rétrospectives . . .

EVOLUTION DU CONCEPT DE DERIVEE

par: Jean-Paul Collette
Cegep Montmorency

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), le grand génie universel du dix-septième siècle et le rival de Newton dans l'invention du calcul différentiel et intégral, est né dans la ville de Leipzig, le premier juillet 1646. Son père fut un professeur de philosophie qui descendait d'une bonne famille. Les premières années du jeune Leibniz se déroulent dans une atmosphère intellectuelle intense où la politique occupe une place importante.

A l'âge de six ans, il pleure la mort de son père qui avait fait naître chez lui une passion pour l'histoire. Dès l'âge de huit ans, il commence l'étude du latin puis passe à l'étude du grec en procédant comme un autodidacte. Avant d'avoir ses quinze ans, il délaisse les études classiques pour entreprendre la réforme de la logique philosophique dans sa "Characteristica generalis" où il conçoit une réforme de toutes les sciences, par l'usage d'un langage scientifique universel et un calcul de raisonnement. Le moins que l'on puisse dire c'est qu'il n'a pas élaboré cette réforme mais il l'a imaginé entièrement tout en fournissant les éléments de base.

Leibniz s'est inscrit à l'Université de Leipzig, en droit, dans sa quinzième année. En plus d'étudier le droit, il s'occupe à lire abondamment les travaux de Képler, Galilée et Descartes. Durant l'été 1663, il étudie les mathématiques et prend ainsi contact avec les mathématiques du temps. En 1666, la faculté de droit de Leipzig lui refuse le titre de docteur, à cause de son jeune âge (on peut facilement mettre en doute cette raison trop simpliste). Il décide alors de quitter sa ville natale pour Nuremberg où il est reçu docteur en droit le 5 novembre 1666 pour son brillant essai portant sur l'enseignement des lois par la méthode historique. Par la même occasion, il refuse l'offre que l'Université lui a faite de devenir professeur de Droit à l'Université prétendant qu'il avait des ambitions différentes. Si l'année 1666 fut une année miraculeuse pour Newton, elle représente pour Leibniz le moment où il rédigea le "De arte Combinatoria", "l'essai d'un jeune étudiant" selon Leibniz. Il présente dans cet essai, une tentative pour créer une méthode générale dans laquelle toutes les vérités de la raison devraient être réduites à une sorte de calcul. En somme, Leibniz cherchait à établir la logique symbolique que George Boole (1815-1864) a inventée au milieu du XIX^{e} siècle.

Son essai qui lui a valu son titre de docteur en Droit, lui a aussi permis d'être engagé par l'Electeur de Mayence dans une commission chargée de la recodification de certains statuts. Il travaillera le reste de sa vie au service diplomatique de l'Electeur puis de 1676 à sa mort pour le compte du Duc de Brunswick à Hanovre. En 1672, on le retrouve à Paris sur une mission diplomatique. Durant son séjour dans la capitale française, il rencontre Huygens et ce dernier entreprend la véritable formation mathématique de Leibniz qui a alors vingt-six ans. Les leçons de Huygens sont interrompues de janvier à mars 1673 durant l'absence de Leibniz qui visite alors Londres comme attaché pour l'Electeur de Mayence.

Durant son séjour à Londres, Leibniz rencontre les mathématiciens anglais, entre autres Oldenburg, montre ses travaux, assiste aux rencontres de la Royal Society et expose aux membres la machine à calculer dont le prototype est nettement supérieur à la machine de Pascal. Avant de quitter Londres pour Paris en mars 1673, il est élu membre étranger de la Société à cause de ses travaux qui comprennent entre autres sa machine à calculer[1]. Avant de quitter Paris pour entrer au service du Duc de Brunswick (il y demeurera jusqu'à sa mort), Leibniz, sous les encouragements de Huygens, consacre tous ses temps libres aux mathématiques et les résultats ne se font pas attendre: il découvre le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, il développe une bonne partie de sa notation du calcul et il trouve un bon nombre de formules élémentaires de différentiation.

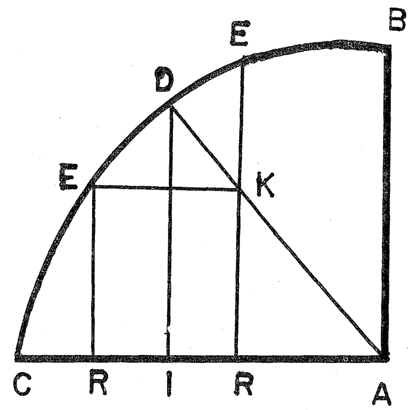
1- La machine de Pascal a été conçue pour additionner (soustraire) des nombres mécaniquement. Celle de Leibniz, en plus d'assurer l'opération addition, peut aussi multiplier directement sans avoir recours à des additions successives comme dans la machine de Pascal. Dans les deux machines, l'addition s'effectue de la même façon.

Pendant quarante années au service du Duc de Hanovre, il a servi trois maîtres à titre de bibliothécaire, d'historien et de guide intellectuel de la famille du Duc. Durant son service, il a consacré beaucoup de temps à poursuivre ses études favorites avec le résultat qu'il a laissé derrière lui une montagne de papiers portant sur toute sorte de sujets. Il fut particulièrement un linguiste de talent, et ses travaux en philosophie l'ont placé parmi les grands philosophes de son temps. Il s'intéressa beaucoup à des grands projets comme la réunion des Eglises Catholiques et Protestantes et plus tard , la fusion des deux sectes protestantes de son époque. En 1682, lui et Otto Mencke fondent le journal scientifique "Acta eruditorum" dans lequel ses travaux mathématiques, pour un bon nombre, y seront publiés entre 1682 et 1692. En 1700, Leibniz fonde l'Académie des Sciences de Berlin et prévoit aussi la fondation d'académies semblables à Dresden, Vienne et à St-Peterbourg (Léningrad).

Les dernières sept années de sa vie furent assombries par la controverse entre lui et Newton concernant la découverte du calcul. En 1714, l'Electeur George Louis, son employeur, devient le premier Roi allemand de l'Angleterre et malheureusement pour Leibniz, il fut abandonné à son sort dans la ville de Hanovre alors qu'il désirait tant accompagner George en Angleterre. Il s'éteint dans sa 70^{e} année, abandonné, et seul son secrétaire fidèle, dit-on, assista aux funérailles du plus illustre des grands mathématiciens allemands du XVII^{e} siècle.

Leibniz fut surtout intéressé dans les premières années de son existence, aux lois et à la logique. Cependant, sa rencontre avec Huygens à Paris en 1672, a marqué les débuts d'une activité mathématique intense dont les résultats permettront à Leibniz d'occuper une place de choix dans l'évolution du calcul. Vers 1673, après avoir étudié les séries infinies au contact des mathématiciens anglais et de Huygens, il travaille sur le problème des tangentes où il trouve une solution basée sur le "triangle caractéristique" - le triangle différentiel qui est apparu chez Torricelli, Fermat, Barrow, Pascal - . Dans une lettre écrite trente années après à Jacques Bernoulli (1654-1705), il attribue l'inspiration de l'utilisation du triangle différentiel à une figure vue dans le "Traité des sinus du quart de cercle" de Pascal. Il poursuit en disant que de cette figure, une lumière jaillit de lui qui lui a permis de réaliser que la détermination de la tangente à une courbe dépend du rapport des différences en ordonnées et en abscisses.

Pascal avait vu que $\frac{AD}{DI} = \frac{EE}{RR} = \frac{EE}{EK}$ et pour un intervalle RR petit, le segment de droite EE est identifiable (en valeur numérique) à l'arc EE.
Ce que Pascal n'a pas vu, c'est la détermination de la tangente EE par la différence des ordonnées ER sur la différence des abscisses CR. De plus, Leibniz constate que la quadrature dépend de la somme des ordonnées sur la courbe CB en considérant des rectangles infiniment petits pour des intervalles infinitésimaux en abscisse. Ainsi, les opérations de sommation (intégration) et de recherche des différences (différentiation) sont mutuellement inverses.



Vers 1676, Leibniz est en possession d'une méthode générale capable de trouver les sommes et les différences de fonctions où les fonctions peuvent être rationnelles, irrationnelles, algébriques ou transcendentales. Pour appliquer sa méthode, il se devait de développer un symbolisme adéquat, ce qu'il fit avec brio. A l'automne de l'année 1675, il commence à élaborer son symbolisme applicable pour la différentiation et pour l'intégration des fonctions. Il débute en désignant par "w" la différentielle de y puis il change pour 1 ou $\frac{y}{d}$ à la place de w. Un peu plus tard, il écrit en premier $\frac{x}{d}$ comme la différentielle de x puis il introduit définitivement les symboles "dx" et "dy" comme les différentielles de x et y respectivement. Enfin, il utilise la dérivée sous la forme $\frac{dx}{dy}$ dans un manuscrit; cependant, dans le premier texte de calcul publié par Leibniz en 1684, nous y retrouvons les symboles dx, dy et aussi dx : dy mais sous la forme $\frac{dx}{dy}$.

Leibniz symbolise par "omn. l" comme la somme de toutes les ordonnées sous une courbe puis, plus tard, il utilise le symbole " $\int$ l", qui change au profit de " $\int ydx$". Cette notation fait contraste avec celle de Newton qui utilise "x" pour $\int xdt$ et une autre forme comme " $\boxed{x}$ " pour $\int xdt$.

Notons que Leibniz utilise le signe " $\sqcap$ " pour désigner notre signe égal (=).

Newton dans les "Principia" a calculé le moment du produit AB, parallèlement Leibniz a déterminé la "différence" du produit xy correctement, tout en ayant certaines difficultés à exprimer d (xy) de la bonne façon. Ainsi, il hésite à écrire d (xy) = dx dy, de même il met en doute la relation $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dx}{dy}$: cependant, à la fin, il écrit correctement les relations:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

qui sont obtenues comme suit: x devient x + dx

y devient y + dy

puis soustrait la valeur originale et élimine les termes contenant un produit de différentielles comme dx dy car il considère que dx dy est beaucoup plus petit qu'un terme comme ydx ou xdy. Il a trouvé de cette façon la différence x^n étant $nx^{n-1}dx$ et l'intégral x^n comme $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Dans son premier ouvrage sur le calcul différentiel et intégral intitulé "Nova methodus pro maximus et minimis, itemque tangentibus, que nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus",[1] Leibniz a défini la différentielle d y comme suit: la différentielle d y est à la différentielle d x comme l'ordonnée y est à la sous-tangente. Dans cette définition, il est clair que d y et d x sont des quantités petites mais finies et de ce fait, elles sont comparables à celles qui y sont définies dans le calcul aujourd'hui.

Même s'il n'a pas réussi à définir correctement les différentielles d'ordre supérieur à un, il en a fourni une interprétation géométrique qui correspond intuitivement à tracer, point par point, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$.

1- "Une nouvelle méthode pour les maxima et les minima, aussi bien que pour les tangentes, laquelle peut aussi être appliquée (est dit de façon négative dans le texte latin) aux quantités fractionnaires et irrationnelles" (1684).

Par ailleurs, il utilise correctement des différentielles d'ordre supérieur à un dans la recherche des maxima et des minima et il est en mesure de déterminer les changements de concavité des courbes ainsi que les points d'inflection.

La grande contribution de Leibniz aux mathématiques, fut son calcul, mais il est intéressant de noter certaines de ses préoccupations mathématiques de nature différente. On lui doit possiblement la généralisation du théorème du binôme au théorème multinomial: le développement de $(a+b+c)^n$ par exemple. L'introduction des "déterminants" dans le monde occidental vers 1693 lui est généralement attribuée même si quelques années auparavant, Seki Kōwa du Japon avait émis des considérations de même nature. Enfin, ses travaux de logique portant sur le développement d'un calcul logique malgré une influence très limitée représentent un réel progrès vers la création de la logique symbolique de Boole.

Les fondateurs du calcul différentiel et intégral ont énoncé clairement les règles d'opération du calcul (algorithmes) et l'application de ces algorithmes par les Bernoulli, (Jean et Jacques surtout), Léonard Euler, Brook Taylor, Colin MacLaurin, Abraham De Moivre, Alexis Claude Clairant, Jean-le-Rond d'Alembert, Johann Heinrich Lambert, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon de Laplace, et autres, a connu des succès retentissants qui ont suppléé aux faiblesses logiques de la nouvelle analyse. Les écrivains du XVIII^{e} siècle sont indécis, certains n'ont aucun scrupule dans l'utilisation formelle des différentielles de Leibniz et des fluxions de Newton, d'autres, par contre, ont tenté d'ébaucher une critique soutenue à l'égard des imperfections inhérentes à cette course folle vers une mathématique sans fondement.

Parmi les plus éminents critiques, citons Bernard Nieuwentijt (1654-1718), Michel Rolle (1652-1719), George Berkeley (1685-1753), et Lagrange. Dans trois traités séparés, Nieuwentijt admet l'exactitude des résultats trouvés, mais critique la nature vaporeuse des quantités évanouissantes de Newton et le manque de définitions précises des différentielles d'ordre supérieur de Leibniz.