COMMENT TROUVER DES NOMBRES PARFAITS?

par: Eugène H. Lehman
Université du Québec
à Trois-Rivières

Un entier N est <u>parfait</u> si N = la somme de ses facteurs (sauf N lui-même). Par exemple deux nombres avec cette qualité sont $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ et bien sûr $1 = 1$. Pouvons-nous aisément en trouver d'autres? Oui.

Quand $M = 2^{n+1} - 1$ est premier, $2^n M$ est parfait, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Preuve:

La factorisation première de N est $2^n M$. Par la loi des séries géométriques, $M = 1 + 2 + \ldots + 2^n$. Alors, $N = M(2^n)$

$$= (1 + 2 + \ldots + 2^n)2^n$$

$$= (1 + 2 + \ldots + 2^n)((2^n - 1) + 1)$$

$$= (1 + 2 + \ldots + 2^n)((1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) + 1)$$

$$= 1 + 2 + \ldots + 2^n + 2(1 + 2 + \ldots + 2^n) + 4(1 + 2 + \ldots + 2^n)$$

$$+ \ldots + 2^{n-1}(1 + 2 + \ldots + 2^n) + (1 + 2 + \ldots + 2^n)$$

$= 1 + 2 + \ldots + 2^n + 2M + 4M + \ldots + 2^{n-1}M + M$ qui est la somme des facteurs de N (sauf N).

Observer que M doit être premier; sinon il y a les facteurs de M à additionner à cette somme qui deviendrait une valeur plus grande que N. Evidemment, si $n > 1$, n doit être pair, car si n est impair, $m = \frac{1}{2}(n + 1)$ est entier, et $M = 4^m - 1$, divisible par 3. Nous prouvons la dernière assertion par induction:

1. Si $m = 2$, $4^m - 1 = 15$ divisible par 3.
2. Si $4^{m-1} - 1$ est divisible par 3 pour $m > 2$, alors $4^m - 1 = 4(4^{m-1}) - 4 + 3$ $= 4(4^{m-1} - 1) + 3$, divisible par 3.

Alors la parité de n est nécessaire pour la perfection de N. Mais elle n'est pas suffisante. Par exemple, si $n = 8$, $N = 2^8 (2^9 - 1) = 256 \times 511 = 130{,}816$. Mais $511 = 7 \times 73$; alors 130,816 n'atteint pas la perfection.

Voici les 6 plus petits nombres parfaits, N:

n	2^n	M	N
0	1	1	1
1	2	3	6
2	4	7	28
4	16	31	496
6	64	127	8128
12	4096	8191	33550336