

COMMENT TROUVER DES NOMBRES PARFAITS ?

par: Eugène H. Lehman
Université du Québec
à Trois-Rivières

Un entier N est parfait si $N =$ la somme de ses facteurs (sauf N lui-même). Par exemple deux nombres avec cette qualité sont $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ et bien sûr $1 = 1$. Pouvons-nous aisément en trouver d'autres? Oui.

Quand $M = 2^{n+1} - 1$ est premier, $2^n M$ est parfait, $n = 0, 1, 2, \dots$

Preuve:

La factorisation première de N est $2^n M$. Par la loi des séries géométriques, $M = 1 + 2 + \dots + 2^n$. Alors, $N = M(2^n)$

$$= (1 + 2 + \dots + 2^n)2^n$$

$$= (1 + 2 + \dots + 2^n)((2^n - 1) + 1)$$

$$= (1 + 2 + \dots + 2^n)((1 + 2 + \dots + 2^{n-1}) + 1)$$

$$= 1 + 2 + \dots + 2^n + 2(1 + 2 + \dots + 2^n) + 4(1 + 2 + \dots + 2^n)$$

$$+ \dots + 2^{n-1}(1 + 2 + \dots + 2^n) + (1 + 2 + \dots + 2^n)$$

$$= 1 + 2 + \dots + 2^n + 2M + 4M + \dots + 2^{n-1}M + M \text{ qui est la somme des facteurs}$$

de N (sauf N).

Observer que M doit être premier; sinon il y a les facteurs de M à additionner à cette somme qui deviendrait une valeur plus grande que N . Evidemment, si $n > 1$, n doit être pair, car si n est impair, $m = \frac{1}{2}(n + 1)$ est entier, et $M = 4^m - 1$, divisible par 3. Nous prouvons la dernière assertion par induction:

1. Si $m = 2$, $4^m - 1 = 15$ divisible par 3.

2. Si $4^{m-1} - 1$ est divisible par 3 pour $m > 2$, alors $4^m - 1 = 4(4^{m-1}) - 4 + 3 = 4(4^{m-1} - 1) + 3$, divisible par 3.

Alors la parité de n est nécessaire pour la perfection de N . Mais elle n'est pas suffisante. Par exemple, si $n = 8$, $N = 2^8 (2^9 - 1) = 256 \times 511 = 130,816$. Mais $511 = 7 \times 73$; alors 130,816 n'atteint pas la perfection.

Voici les 6 plus petits nombres parfaits, N :

n	2^n	M	N
0	1	1	1
1	2	3	6
2	4	7	28
4	16	31	496
6	64	127	8128
12	4096	8191	33550336

Les Mathématiques au CEGEP

Collection Mathématiques nouvelles

Cours 101

INITIATION À LA MATHÉMATIQUE, par Roch Ouellet

Livre de l'étudiant	\$7.00
Solutionnaire	\$4.00

Ce manuel, où les prérequis sont intégrés au texte, permet de se familiariser avec ces outils mathématiques fondamentaux que sont les ensembles, les nombres réels, les relations d'équivalences, les fonctions, les groupes...

Ce manuel s'est mérité le prix du livre de l'Association mathématique du Québec en 1972.

Cours 103

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL I, par Jean Ménard

Livre de l'étudiant	\$7.00
Solutionnaire	\$4.00

Ce livre est moderne quoique non révolutionnaire

- Par les sujets qu'il traite;
- Par la technique d'enseignement qu'il propose.

Cours 203

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL II, par Jean Ménard

Livre de l'étudiant	\$7.00
Solutionnaire	\$4.00

Ce livre fait suite au **Calcul I** dont l'auteur présente un résumé succinct en guise de chapitre de révision.

Le livre lui-même comprend trois grandes parties:

- Introduction aux concepts de base de l'analyse mathématique et en particulier à la continuité;
- Suites et séries de nombres, séries de puissances;
- Mesure des aires, intégrales de Riemann et applications.

ÉDITIONS F.I.C., La Prairie, P.Q.