TERMINOLOGIE

M54: ABUS DE LANGAGE

Leibnitz, et plusieurs autres depuis, ont cherché un langage qui permettrait d'exposer les mathématiques de façon absolument objective. On espérait ainsi éliminer toute ambiguïté du discours mathématique de sorte qu'il soit possible de vérifier "mécaniquement" si une preuve donnée est correcte ou non. En un sens, cet objectif a été atteint avec les "Principia Mathematica" de Whitehead et Russell.

Malheureusement, un texte mathématique "correctement écrit" est extrêmement complexe, voire inintelligible - même si l'objet est intuitivement simple. On simplifie considérablement la complexité du discours mathématique par l'emploi d'abréviations convenablement choisies.

Cependant, de cette façon on ne se débarrasse pas encore d'une certaine allure de pédanterie, en quelque sorte "coupage de cheveux en quatre dans le sens de la longueur"! Ainsi, il peut être avantageux de négliger certaines distinctions. Par exemple, on peut identifier, généralement sans mal, les notions suivantes

- la formule définissant une relation et l'ensemble-solution correspondant;
- une relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et son graphique cartésien.

Pareillement, on utilise le même symbole + pour désigner les diverses opérations d'addition, que ce soit dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ et même entre vecteurs, etc.

Nous convenons donc de la nécessité pratique de recourir à des abus de langage. Toutefois, à notre avis, celui-ci doit être introduit explicitement et assumé en tant que tel. Sinon il y a risque de confusion.

Ainsi pour qu'un étudiant puisse distinguer les polynômes à coefficients rationnels et ceux à coefficients réels - ce qui est à la base des notions de nombres algébriques, de nombres transcendants - il doit savoir que "+" et "·" dénotent, selon le contexte, soit des opérations sur $\mathbb{Q}$, soit des opérations sur $\mathbb{R}$.

Pour frapper l'imagination, disons lapidairement qu'"en principe, il faut user avant d'abuser".

Signalons aussi qu'à mesure que le niveau des connaissances monte, le texte se dépouille, de telle sorte que les pièces manquantes sont assurées de reconstitution.

Pratiquement, on peut distinguer entre bons abus (ou abus admis) et mauvais abus.

Exemples de mauvais abus

- sin a+b si l'on a en vue sin(a+b)
- f(x) = fonction croissante

  (c'est-à-dire = pour est, voir **M 9**)
- X = nombres pairs
- "le chiffre 23"
- 2 = 0.3 si l'on a en vue log 2 = 0.3, sinon c'est tout simplement faux.
- $\int x+2dx$ au lieu de $\int (x+2)dx$

  bien que univoque, cette forme entretient une attitude de mauvais abus.

Exemples d'abus acceptés

- "la fonction f(x)" (tant mieux!)
- log 2 = 0.3 (discutable! En fait on abuse sur [log 2 à une décimale exacte] = 0.3)
- plusieurs acceptions pour "côté d'un triangle" (tant mieux!) (voir **M16**)
- dans la preuve par 9: "la somme des chiffres" (hélas!)
- $(3t^2)'$ signifie que, sans autre, on dérive par rapport à t.

Pédagogiquement, dans les abus permis, on peut encore distinguer entre abus provisoire et abus définitif.

L'abus provisoire peut tenir à des considérations de niveau, ainsi Papy identifie fonction et graphe. Dans ce cas l'abus provisoire est <u>une partie de la définition ultime</u>, de sorte qu'une extension suffira - autrement l'abus provisoire serait à rejeter.

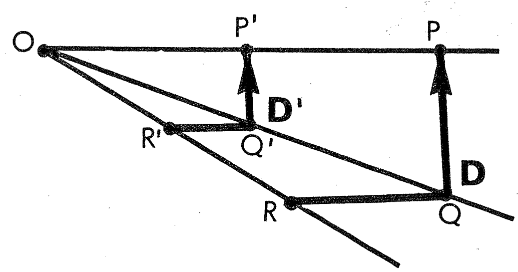
Ceci suggère que l'on peut, dans certains cas, procéder d'un abus provisoire [graphe/fonction] , passer à la définition [fonction] et retomber dans un abus définitif [image f(x) (de x par f)] .

Un abus définitif ne signifie pas que l'on ne revienne de temps en temps, ou lorsque c'est impérieux, à la formulation complète.

M55: L'HOMOTHETIE

Soit O un point d'un plan (espace) et k un nombre réel non nul.

L'homothétie de centre O et de rapport k est l'application du plan sur lui-même qui à tout point P fait correspondre le point P' tel que $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$



homothétie déterminée par application
d'un drapeau ($0 < k < 1$)

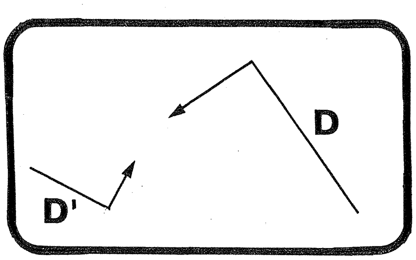
Remarques

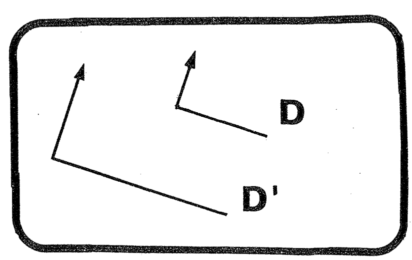
1. Dans le contexte vectoriel, les seules homothéties considérées sont celles dont le centre est l'origine des axes.
   Ces homothéties sont quelquefois appelées "homothéties linéaires", elles sont de la forme $\mathcal{H} : x \longrightarrow kx$.

2. Si $k \neq 1$, alors le point O est le seul point fixe de l'homothétie; si $k = 1$, on a affaire à (une forme de) l'identité.

M56: LA SIMILITUDE

On appelle similitude toute isométrie, toute homothétie et toute transformation résultant de la composition de celles-ci, quel qu'en soit l'ordre.





Représentation d'une similitude à l'aide de deux drapeaux semblables

Remarque:

Une similitude peut inverser le sens, comme par exemple dans la première figure. Tandis que dans l'homothétie, l'orientation du plan se conserve.

On distingue donc entre similitudes directes (ou positives) et inverses (ou négatives) selon que l'orientation du plan est conservée ou non.

M57: OPERATION (OU LOI DE COMPOSITION)

Soit X un ensemble non vide, n un nombre naturel non nul.

Une opération n-adique sur X est, par définition, une fonction de X^n dans X.

Remarque:

1-adique se dit habituellement unaire ou monadique
2-adique ou binaire ou diadique
3-adique ou ternaire ou triadique.

Exemples:

Opérations unaires

sur $\mathbb{N}$, $+2 : n \longmapsto n+2$

sur $\mathbb{Z}$, $- : x \longmapsto -x$

sur $\mathbb{Q}$, $|\,| : x \longmapsto |x|$

sur $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}\setminus : X \longmapsto \mathbb{N}\setminus X$

sur $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$, $\overline{} : X \longmapsto \overline{X}$ (adhérence de X)

Toute transformation du plan est une opération unaire.

Exemples d'opérations binaires

sur $\mathbb{R}$, $+ : (x, y) \longmapsto x+y$

sur $\mathbb{R}$, $p : (x, y) \longmapsto x$ *Projection orthogonale sur l'axe des abscisses.*

etc.

Note:

Dans un système d'axes 0, x, y, z; $x+y = z$ est l'équation d'un plan dont toute intersection avec un plan parallèle à 0, x, y représente une classe de couples équivalents comme $(2,7) \equiv (1,8) \equiv (3,6) \equiv (6,3) \equiv (-25,34) \equiv (0,9)$ etc.

Pour la multiplication, le principe est le même, mais le corps correspondant est moins simple.

Exemple d'opérations ternaires

$(x,y,z) \longmapsto z\frac{y}{x}$ ou quatrième proportionnelle

$(x,y,z) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ou norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Remarque finale:

Toute opération est une fonction mais non réciproquement. On observe aussi qu'une opération unaire est une relation binaire, une opération binaire est une relation ternaire, etc.

M58: PUISSANCE, BASE ET EXPOSANT

Soit a^r avec, par exemple, $a, r \in \mathbb{N}$, la forme a^r s'appelle une puissance, l'élément a s'appelle la base (de la puissance), et r l'exposant (de la base).

Exemple: 2^3, 2^5, 5^2, 3^0

Avec 2^3 le nombre 8 est sous forme de puissance.

Eliminations et mises en garde:

2^5 ne se lit pas "deux à la puissance cinq" mais bien "deux exposant cinq".
Avec 2^3 on a le choix "deux au cube" ou "deux exposant trois".

L'aperçu général suivant, situe les éléments:

Avec Fonction (relation ternaire)	*Fonction réciproque*
Addition $12 + 3 = 15$ quinze sous forme additive somme de "termes"	Soustraction $15 - 3 = 12$ douze sous forme de différence différence de "termes"
Multiplication $12 \times 3 = 36$ trente-six sous forme multipli- cative produit de "facteurs" multiplicande et multiplicateur	Division $36 \div 3 = 12$ douze sous forme de quotient quotient de "termes" dividende et diviseur
Exponentiation $12 * 3 = 12^3 = 1728$ mille sept cent vingt-huit sous forme de puissance base et exposant	Extraction $1728 \top 3 = \sqrt[3]{1728} = 12$ douze sous forme de racine (base) indice et radicande Logarithmation $1728 \perp 12 = \log_{12} 1728 = 3$ trois sous forme de logarithme nombre et base.