Coin du problème

Un prix en argent est accordé pour la solution d'un problème aux conditions suivantes:

Un jury formé d'André Joyal et de Maurice Joyal décrètera le gagnant ou les gagnants en se basant sur les critères suivants:

1° Si une des solutions reçues est plus "originale" que toutes les autres, le prix sera attribué à l'auteur de cette solution.

2° Si toutes les bonnes solutions sont "équivalentes", le prix est accordé à l'auteur de la première bonne solution reçue.

3° Si aucune bonne solution n'est reçue dans les délais prévus, le problème reparaîtra dans un bulletin subséquent et le prix attribué en sera augmenté.

On peut faire parvenir sa solution à

Equipe du Bulletin
Association Mathématique du Québec
4342, rue Bourbonnière
Montréal 406, Qué.

La date limite pour participer à ce concours est le 30 août 1973

Voici une solution au problème présenté dans le Bulletin de l'AMQ, volume XIV, numéro 5. Cette solution est proposée par M. Roland Bélanger, professeur au CEGEP de Rimouski.

DEMONSTRATION: Nous montrerons que si A est un sous-ensemble de la sphère S de rayon unité, centrée à l'origine tel qu'aucun point x

de A n'ait son antipode $-x$ dans A alors l'aire de A est inférieure ou égale à 2π.

En effet, divisons la sphère à l'aide du plan YOZ.

Soient P_1, la partie de S à l'arrière de YOZ et P_2, son complémentaire.

Il est claire que :

$$\text{aire}(P_1 \cap A) + \text{aire}(P_2 \cap A) = \text{aire}(A)$$

car $(P_1 \cap A) \cap (P_2 \cap A) = \phi$ et $(P_1 \cap A) \cup (P_2 \cap A) = A$.

Considérons t l'application suivante.

$$\begin{aligned} t : P_1 \cap A &\longrightarrow P_2 \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

$t(P_1 \cap A) \cap (P_2 \cap A) = \phi$ car aucun point de A n'a son antipode dans A.

De plus $t(P_1 \cap A) \cup (P_2 \cap A) \subseteq P_2$.

Donc $\text{aire}(t(P_1 \cap A)) + \text{aire}(P_2 \cap A) \leq \text{aire}(P_2)$.

Or $\text{aire}(t(P_1 \cap A)) = \text{aire}(P_1 \cap A)$ car t est isométrique, et $\text{aire}(P_2) = 2\pi$.

Donc $\text{aire}(P_1 \cap A) + \text{aire}(P_2 \cap A) \leq 2\pi$

c'est-à-dire : $\text{aire}(A) \leq 2\pi$.

VOICI UNE AUTRE SOLUTION ÉQUIVALENTE À LA PRÉCÉDENTE :

Soit la symétrie antipodale $t : S \longrightarrow S$
$x \longmapsto -x$

Supposons qu'il existe $A \subseteq S$ tel que pour tout $x \in A$, $t(x) \notin A$.

A montrer : aire $(A) \leq 2\pi$.

Comme $t(A) \cap A = \phi$ (hypothèse)

on a : aire $(t(A))$ + aire $(A) \leq$ aire $(S) = 4\pi$

comme t est une isométrie, on a :

aire $(t(A))$ = aire (A)

d'où

aire (A) + aire $(A) \leq 4\pi$

i e. aire $(A) \leq 2\pi$.

— — — — — — —

Etant donné deux points distincts P, Q du plan $\mathbb{R}^2$, le segment $[P, Q]$ est, par définition, l'ensemble de tous les points points de la droite passant par P et Q et situés entre P et Q, P et Q inclus. (Prix $15.00)

Démontrer qu'étant donné un ensemble de cinq points P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 du plan $\mathbb{R}^2$ tel qu'aucun sous-ensemble de trois points soit aligné, alors on peut trouver deux paires disjointes $\{P_i, P_j\}$, $\{P_k, P_r\}$ incluses dans $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ telles que les segments $[P_i, P_j]$ et $[P_k, P_r]$ se rencontrent.

(André Joyal)