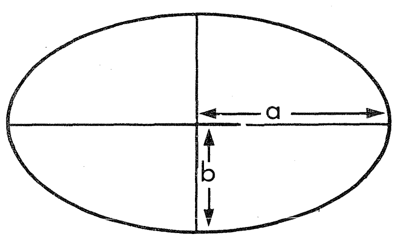
# Concours mathématique du Québec

1. Un homme entre dans un magasin et se choisit un chapeau de \$10. N'ayant pas assez d'argent sur lui, il fait la proposition suivante au marchand: "Si vous me prêtez autant d'argent que j'ai en poche, je vais acheter ce chapeau à \$10." Le marchand accepte et notre monsieur achète son chapeau. Il va ensuite dans un autre magasin et répète l'opération, pour acheter cette fois une paire de souliers à \$10. A un troisième magasin, ce même procédé lui permet d'acheter un parapluie à \$10. Après cet achat, il n'a plus un sou. Combien notre homme avait-il d'argent en poche au moment d'entrer chez le marchand de chapeaux?

2. Un caissier distrait a interverti le nombre de dollars et le nombre de cents en encaissant le chèque de Monsieur Beauchamp. Après avoir acheté un timbre de 5 cents, Monsieur Beauchamp s'est aperçu qu'il lui restait exactement le double du montant original de son chèque. Quel était le montant du chèque de Monsieur Beauchamp?

3. Soit $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ un ensemble à sept éléments. Trouver sept sous-ensembles de trois éléments de A tels que les deux propriétés suivantes soient vérifiées:
   1) Deux (2) quelconques de ces sous-ensembles n'ont qu'un élément en commun.
   2) Etant donné deux (2) éléments quelconques de A, il y a un et un seul de ces sous-ensembles qui contient ces deux éléments.

4. 


On considère une ellipse dont le demi grand axe est de longueur a et le demi petit axe est de longueur b.

Trouver une figure dont le périmètre est le même que celui de cette ellipse mais dont la superficie est supérieure de $(a-b)^2$ à celle de cette ellipse.

5. La base d'un groupe d'avions, est sur une petite île située sur l'équateur. Chacun des avions peut contenir juste assez de carburant pour lui permettre de parcourir la moitié de la circonférence terrestre, le long de l'équateur. La seule source de carburant est sur l'île, mais on peut transférer du carburant d'un avion à un autre en plein vol. Transferts de carburant et remplissage au sol se font instantanément. Quel est le plus petit nombre d'avions requis pour permettre à l'un d'entre eux de faire le tour de la terre le long de l'équateur, en supposant que les avions voyagent tous à la même vitesse constante, ont le même taux de consommation de carburant et retournent tous sains et saufs à leur base? Décrire l'opération.

6. Remplacer les dix lettres A, C, D, E, M, O, R, S, T, U par les dix chiffres 0, 1, 2, ..., 9 de façon à vérifier les relations suivantes:

$$E \times E = M \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} \mathrm{ORME} & \big|\,\underline{\mathrm{ME}} \\ \underline{\mathrm{SAA}}\phantom{E} & \\ \mathrm{DUE} & \\ \underline{\mathrm{DUC}} & \\ \mathrm{T} & \end{array}$$

Existe-t-il plusieurs solutions?
Note. Chaque lettre correspond à un chiffre et chaque chiffre à une lettre. La lettre O ne correspond pas nécessairement au chiffre zéro.

7. Soit U l'ensemble de toutes les suites finies qui peuvent être formées à l'aide des lettres J et B. Par exemple, BJB, JJ, B, BBJJJBJJBB sont des éléments de U. Dans ce problème, nous entendons par

"mot": un élément de U (une suite finie formée de B et de J)
"langage": une partie de U (c'est-à-dire un ensemble de mots)

Par exemple, $\{$B, BB, BBJ, JBJB$\}$ est un langage. C'est le langage dont les mots sont B, BB, BBJ et JBJB. L'ensemble des mots qui commencent par B et se terminent par J est un langage. On peut définir un langage en se donnant une grammaire, c'est-à-dire:

$1^o$ un nombre fini de mots, qu'on appelera les mots initiaux de la grammaire

$2^o$ un nombre fini de règles de la forme suivante: si A est un mot dans lequel apparaît la suite de lettres $\ell_1\ell_2\ldots\ \ell_r$ , alors on peut remplacer dans A cette suite de lettres par $t_1t_2\ldots\ t_s$. On écrit

$$\ell_1\ell_2\ \ldots\ell_r \longrightarrow t_1\ldots t_s\ .$$

Le langage défini par une grammaire est, par définition, le langage constitué des mots initiaux et de tous les mots qui peuvent être obtenus de ceux-ci par applications successives d'une ou de plusieurs règles.

Par exemple, le langage défini par la grammaire

mot initial: BJ
règles : $R_1$ BJ $\longrightarrow$ BBJJ
$R_2$ BJ $\longrightarrow$ JB

contient les mots BBJJ (on applique $R_1$ à BJ), BBBJJJ (on applique $R_1$ à BBJJ), BJJB, JBJB, JJBB, ... En fait, on peut voir que le langage défini par cette grammaire est l'ensemble des mots ayant le même nombre de B et de J.

(i) Trouver une grammaire qui définit le langage constitué des mots qui commencent par BJ (Démontrer)

(ii) Démontrer qu'il n'existe aucune grammaire qui définisse le langage constitué des mots n'ayant pas le même nombre de B et de J.