EVOLUTION DU CONCEPT DE DERIVEE

par: Jean-Paul Collette
Cegep Montmorency

Isaac Newton (1642-1727) est né le jour de Noël - de l'ancien calendrier - dans le petit village de Woolstharpe situé à huit milles au sud de Grantham dans le comté de Lincoln Angleterre. Enfant prématuré d'un père qui mourut à l'âge de trente-sept ans avant la naissance de son fils Isaac et d'une mère économe, diligente et capable de diriger, il inventa ses propres jouets mécaniques dont l'ingéniosité dénote déjà l'esprit scientifique précoce du jeune Newton. Le Révérend William Ayscough, frère de la mère de Newton et gradué du "Trinity College" de Cambridge, persuada celle-ci à envoyer son fils à Cambridge plutôt que de le garder sur la ferme familiale pour la seconder. En juin 1661, Newton entra au Trinity College à l'âge de dix-huit ans et rien de ses études antérieures ne permettait d'entrevoir ou même d'espérer la carrière scientifique éblouissante du fondateur de la mécanique et de l'optique.

Au début de son séjour à Cambridge, il s'intéressa en tout premier lieu à la chimie et cet intérêt demeurera tout au long de sa vie. Durant cette première année d'étude, il se procura une copie des Eléments d'Euclide qui éveilla chez lui le désir de lire davantage des ouvrages tels que les "Clavis mathematicae" de William Oughtred (1574-1660), la "Geometria a Renato Des Cartes" de Franz Van Schooten (1615-1660), l'"Optique" de Képler, les travaux algébriques de François Viète, et peut-être le plus important de tous, l'"Arithmetica infinitorum" de John Wallis (1616-1703). Nous pouvons ajouter à ces lectures les cours de Barrow suivis par Newton après 1663 et la connaissance des travaux de Galilée, Fermat, Christian Huygens (1629-1695), etc. A la fin de 1664 (il a 23 ans), Newton semblait prêt à dépasser les connaissances mathématiques de son temps. Au début de l'année 1665, il s'attaque à la généralisation du théorème du binôme et au calcul des fluxions. Puis, à cause de la peste bubonique, Newton retourne chez lui et durant l'année 1665-1666, il connaît une période de découvertes sans précédent: il généralisa le théorème du binôme; il développa son calcul des fluxions et la loi de la gravitation universelle, enfin, il a mis à jour la nature physique des couleurs.

Il retourna à Cambridge en 1667 et s'occupa activement pendant deux ans à des recherches sur l'optique. En 1669, Barrow résigna en faveur de Newton et ce dernier occupa pendant dix-huit ans la chaire laissée vacante par Barrow afin de permettre à Newton d'occuper un poste susceptible de mettre en valeur ses talents. De 1673 à 1683, il enseigna l'algèbre et la théorie dès équations. Vers 1679, il a vérifié sa loi de la gravitation universelle et a établi la compatibilité entre sa loi et les trois lois de Képler sur les mouvements planétaires.

Newton a découvert sa méthode des séries infinies et le calcul différentiel et intégral vers 1665-1666 et durant la décennie qui a suivi, il a produit au moins trois textes portant sur la nouvelle analyse. La première publication de Newton portant sur le calcul différentiel et intégral apparaît seulement dans son ouvrage intitulé "Philosophiae naturalis principia mathematica" publié en 1687 et selon Boyer il constitue le traité scientifique le plus admiré de tous les temps. On décrit généralement ce livre en disant qu'il contient les fondements de la physique et de l'astronomie écrits dans le langage de la géométrie pure.

En 1687, Newton a défendu les droits de l'Université de Cambridge contre le roi impopulaire Jacques II, et comme résultat tangible de son efficacité, il fut élu membre du Parlement en 1689 au moment où le roi fut détrôné et forcé de s'exiler. Il garda son siège au Parlement pendant de nombreuses années sans y avoir fait aucun discours. En 1696, il abandonne son poste de professeur pour prendre la responsabilité de la monnaie en tant que gardien puis devint le directeur de la monnaie en 1699. Newton fut élu président de la "Royal Society" en 1703 et réélu à chaque année jusqu'à sa mort. En 1705, il fut fait "chevalier" par la reine Anne, en récompense des services rendus et probablement, surtout à cause de son travail exemplaire à titre de directeur de la monnaie. Puis les dernières années de sa vie sont assombries par la controverse malheureuse avec Leibniz au sujet de la priorité de son calcul des fluxions sur le calcul différentiel intégral de Leibniz. Des accusations mutuelles de plagiat, des secrets dissimulés dans des cryptogrammes, des lettres anonymes, des traités non publiés, des affirmations d'amis et de supporteurs de deux grands rivaux, des jalousies d'envergure nationale et les efforts des pacificateurs pour réconcilier les clans opposés, voilà en quelques mots les caractéristiques de cette controverse qui se termina, semble-t-il, après la mort de Leibniz (le 14 novembre 1716), mais dont les suites se feront sentir jusqu'à la fin du XVIII^e siècle. Après une lente et atroce maladie, Newton mourut dans la nuit du 20 mars 1727 et fut enterré dans l'Abbaye de Westminster au milieu des héros de l'Angleterre.

La méthode des fluxions de Newton résulte d'une évolution dans la pensée de ce dernier, caractérisée par trois étapes (certains auteurs en considèrent quatre) dont la première coincide avec la généralisation du théorème du binôme.

Le théorème du binôme découvert vers 1664-1665, apparaît pour la première fois dans une lettre datée du 3 juin 1676, adressée a Oldenburg (Secrétaire de la Royal Society) à la suite d'une demande faite par Leibniz au sujet des travaux de Newton sur les séries infinies. Leibniz ne tarda pas à demander de nouveau plus de détails et Newton répliqua par une lettre datée du 24 octobre 1676 dans laquelle Newton explicite davantage le théorème et montre comment il a découvert sa méthode des séries infinies.

Dans la deuxième lettre, Newton fait allusion aux travaux de Wallis au sujet des séries infinies obtenues lorsque ce dernier veut évaluer l'aire sous les courbes (de $x = 0$ à $x = x$) d'équation $(1 - n^2)^n$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$

L'examen des aires pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ a permis à Newton de trouver que le premier terme était toujours x *, les deux premiers étaient $x - \frac{0x^3}{3}$ ou $x - \frac{1}{3}x^3$ ou $x - \frac{2}{3}x^3$ ou $x - \frac{3}{3}x^3$, ... selon que $n = 0, 1, 2, \ldots$ Newton a cherché à trouver un développement en séries pour un n fractionnaire et il débuta avec $n = \frac{1}{2}$ en faisant l'observation que les termes

* Car $(1-x^2)^0 = 1$, $(1-x^2)^1 = 1-x^2$, $(1-x^2)^2 = 1-2x^2+x^4$, $(1-x^2)^3 = 1-3x^2+3x^4-x^6$, et par intégration entre $x = 0$ et $x = x$, le premier terme 1 devient x, $1-x^2$ devient $x-\frac{x^3}{3}$, $1-2x^2+x^4$ devient $x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$, etc.

de la série $\frac{0x^3}{3}$, $\frac{1x^3}{3}$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, ... sont en progression arithmétique. Par conséquent, le premier terme intercalé sera $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$ *, le deuxième sera $x - \frac{3/2\ x^3}{3}$, etc. Puis il a recherché une méthode pour obtenir les autres éléments étant donnés les deux premiers donnés.

L'aire du segment de cercle devient en utilisant son algorithme,

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{1/8\ x^5}{5} - \frac{1/16\ x^7}{7} - \ldots \quad \text{où} \quad -1/8 = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}^{-1}/2}{5}$$

$$-\frac{1/16}{7} = \frac{-1/8 \times \frac{1}{2}^{-2}/3}{7} \quad \ldots\ldots$$

Il a réalisé, après avoir obtenu ce résultat, qu'il pouvait obtenir la même chose en dérivant $(1 - x)^{\frac{1}{2}}$ par son algorithme (interpolation), puis en cherchant l'aire par intégration des termes de la série. En somme, à partir d'une intégration, il a trouvé le théorème du binôme. Maintenant, il peut intégrer ou différencier en utilisant le résultat du théorème.

Il a obtenu ainsi le théorème du binôme qu'il exprime comme suit:

$$\overline{P + PQ}\rceil^{**}\ \frac{m}{n} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \ldots.$$

où P + PQ est la quantité dont on cherche la racine ou la puissance (binôme), P est le premier terme, Q est le terme restant lorsque divisé par le 1er terme, $\frac{m}{n}$ l'indice numérique, $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \frac{m}{n}AQ$, etc.

Dans son ouvrage "De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" composé en 1669 mais publié seulement en 1711, il a formulé une méthode systématique de différentiation très semblable à celle de Barrow. La pente de la courbe $y^n = x^m$ est trouvée en posant tout d'abord $(y + o\ q)^n = (x + o\ p)^m$ où o q et o p correspondent à a et E de Barrow, puis il développe chaque côté de l'égalité par le théorème du binôme. Enfin, il divise le tout par o et élimine les termes contenant o ce qui donne évidemment $\frac{q}{p} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$.

* Entre x et $x - \frac{1}{3}x^3$ on a les coefficients 1 et $-\frac{1}{3}$ dont le terme milieu est $\frac{1}{6}$ ou $\frac{\frac{1}{2}}{3}$.

** $\overline{}\rceil$ symbolise la racine ou la puissance d'une expression algébrique.

Lorsque les fonctions sont explicites en termes de la variable indépendante, il laisse tomber p et q pour ne conserver que o.

Une deuxième étape est franchie au moment où Newton a introduit dans ses méthodes infinitésimales ses quantités appelées "fluentes". Dès 1671, il est en possession du contenu de "Methodus fluxionum et serierum infinitarum" publié seulement vers 1736 dans lequel il expose sa méthode des fluxions.

Dans cet ouvrage, Newton considère une courbe comme générée par le mouvement continu d'un point et les coordonnées du point générateur sont des quantités variables, changeantes. Une quantité changeante est appelée une "fluente" et son taux de changement (sa variation) est appelé la "fluxion" de la fluente. Les quantités p et q utilisées dans son "De Analysi" y sont remplacées par la notation $\dot{x}$ et $\dot{y}$. Les fluentes pour lesquelles x et y sont les fluxions sont désignées $\overset{|}{x}$ et $\overset{|}{y}$. Ainsi, partant de $y = f(x)$ nous avons la suite des fluxions de y comme suit $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$, etc, et la suite des fluentes de y comme suit y , $\overset{|}{y}$, $\overset{||}{y}$, $\overset{|||}{y}$, $\overset{||||}{y}$, etc.

Dans le même ouvrage, il appelle le "moment de la fluente" la quantité infiniment petite par laquelle une fluente comme x varie dans un intervalle de temps infiniment petit, noté o. Ainsi, le moment de la fluente x est donné par le produit $\dot{x}$ o et le moment de la fluente y est donné par $\dot{y}$ o. Newton fait la remarque qu'il peut négliger tous les termes qui sont multipliés par des puissances de o supérieures à un dans les problèmes de différentiation ou d'intégration, mais il ne justifie pas nulle part les raisons logiques de cette remarque. Il admet d'ailleurs que sa méthode est brièvement expliquée plutôt que démontrée d'une façon précise. Il tentera une explication en termes de limite dans l'étape finale de sa conception de l'analyse.

Newton a considéré deux types de problèmes, le premier type correspond à la différentiation, le deuxième type se réfère à la procédure inverse, c'est-à-dire à l'intégration. Dans le premier genre de problèmes, étant donnée une relation entre les fluentes, on cherche une relation entre ces fluentes et leur fluxion. Considérons, à titre d'exemple, la courbe $x^3 + ax^2 - axy - y^3 = 0$ (fonction non explicite). Remplaçons x par $x + \dot{x}\,o$ et y par $y + \dot{y}\,o$ dans l'équation, nous obtenons

$$(x + \dot{x}\,o)^3 + a(x + \dot{x}\,o)^2 - a(x + \dot{x}\,o)\,(y + \dot{y}\,o) - (y + \dot{y}\,o)^3 = 0$$

en développant

$$x^3 + 3x^2 \dot{x} o + 3x(\dot{x} o)^2 + (\dot{x} o)^3 + ax^2 + 2ax \dot{x} o + a(\dot{x} o)^2$$

$$- axy - ay(\dot{x} o) - a(\dot{x} o)(\dot{y} o) - ax \dot{y} o$$

$$- y^3 - 3y^2 \dot{y} o - 3y(\dot{y} o)^2 - (\dot{y} o)^3 = 0$$

utilisant le fait que $x^3 + ax^2 - axy - y^3 = 0$ et divisant les autres termes par o en tenant compte de la remarque de Newton, on obtient

$$3x^2 x + 2ax \dot{x} - ay \dot{x} - ax \dot{y} - 3y^2 \dot{y} = 0$$

Avec cette méthode, Newton a trouvé des maxima et des minima, des tangentes aux courbes, la courbure de certaines courbes, les points d'inflection et le changement de concavité des courbes.

La troisième conception de Newton au sujet de la nouvelle analyse apparaît clairement dans son "De quadratura curvarum" écrit en 1676 mais publié seulement en 1704. Dans son traité, il a cherché à éliminer toute trace de l'infiniment petit et des quantités qui s'écoulent pour les remplacer par une procédure des "rapports premiers et ultimes". Dans la détermination de la fluxion de x^n, Newton procède de façon semblable à celle utilisée dans son "Methodus fluxionum" en remplaçant x par x + o ($x + \dot{x}$ o devient x + o lorsqu'il y a une seule variable indépendante, la fluxion de x devient alors égale à un). Durant le temps que la quantité x, en s'écoulant, devienne x + o, la quantité x^n deviendra, selon Newton, $\overline{x + o}|^{n}$ c'est-à-dire $x^n + n\, o\, n^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}\, o\, o\, x^{n-2} +$ etc... par la méthode du binôme. Maintenant, au lieu de poursuivre son procédé en éliminant les termes qui contiennent o, il forme plutôt le rapport de la variation de x à la variation de x^n, c'est-à-dire 1 à $nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}\, o\, n^{n-2} + \ldots$ Puis il laisse approcher o vers zéro de telle manière que le rapport "ultime" sera 1 à nx^{n-1}.

Le rapport résultant 1 à nx^{n-1} est appelé par Newton, "le rapport ultime des changements" alors que nous devrions dire plutôt la limite du rapport des variations. C'est dans cet ouvrage que nous retrouvons les éléments essentiels de la dérivée tels que conçus par Newton.

En particulier, il a mis l'emphase sur la fonction à une variable plutôt que sur une équation à plusieurs variables (fonction implicite par exemple). Il a mis en lumière la formation du rapport des changements de la variable et de la fonction et la détermination de la limite de ce rapport lorsque les variations approchent zéro. Remarquez le rapport 1 à nx^{n-1} est exprimé à l'inverse de notre dérivée (en somme au lieu de $\frac{dy}{dx}$, il exprime plutôt $\frac{dx}{dy}$).

Certains éléments qui apparaissent dans la pensée de Newton doivent être considérés aujourd'hui comme surajoutés, empruntés. Par exemple, l'utilisation du temps à titre de variable auxiliaire est gratuite; le rapport ultime est maintenant un nombre plutôt que le quotient de deux variations "évanouissantes"; la conception de Newton relative à la limite, est liée à des intuitions géométriques plutôt que basée sur une pensée arithmétique.

Le premier compte rendu publié de son calcul, apparaît indirectement dans son fameux "Principia mathematica philosophiae naturalis" de 1687. Les propositions contenus dans cet ouvrage concernent les vitesses, les accélérations, les tangentes et les courbures et reposent sur sa méthode de calcul. Cependant, Newton a cru bon de présenter son contenu sous la forme de démonstrations géométriques synthétiques contenant très peu de calculs analytiques. Dans son Principia, il nous offre ses trois conceptions de la nouvelle analyse comme étant essentiellement équivalentes mais qui diffèrent par leurs points de vue.

Il est intéressant de noter l'explication de Newton relative à ses rapports ultimes parce qu'elle nous permet de mieux voir le rapprochement entre sa conception dernière et notre dérivée actuelle. Parmi les nombreuses tentatives de Newton pour expliquer le rapport ultime, celle qui suit semble être la plus éclairante:

> "Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement les rapports de quantités ultimes mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'en approchent toujours; et vers lesquelles ils peuvent s'en approcher aussi près que toute différence donnée, mais dont ils ne peuvent jamais les dépasser ou atteindre avant que les quantités soient diminuées indéfiniment".

En particulier l'idée intuitive de ce rapport ultime se retrouve dans le problème des tangentes. Il a considéré une tangente comme la position limite d'une sécante lorsqu'il dit que si les points (d'intersection avec la courbe) sont séparés l'un de l'autre par un petit intervalle, la sécante sera distante alors de la tangente par un petit intervalle. La sécante peut ainsi coincider avec la tangente lorsque le dernier rapport est trouvé. Les deux points doivent coincider ensemble. Avec cette idée de limite, quoiqu'elle puisse être imprécise sur certains points, le calcul différentiel prend son élan définitif sur lequel on pourra le développer rigoureusement.

> "Je ne sais pas comment je peux être perçu par le monde; mais selon moi, je me suis comporté comme un enfant jouant sur le bord de la mer et qui s'est amusé à chercher de temps en temps un caillou plus poli et un coquillage plus joli qu'à l'ordinaire tandis que le grand océan de vérité s'exposait à moi entièrement inconnu".

Tel fut l'appréciation de Newton sur lui-même vers la fin de sa vie. Il fut respecté de son temps et aucun homme n'a reçu autant d'honneurs et de respect sauf peut-être Archimède et Einstein. Il a reçu de ses successeurs, - comme il le dit si bien "Si j'ai vu plus loin que les autres hommes, c'est parce que je me suis tenu sur les épaules des géants" - les briques nécessaires qu'il a su agencer afin d'ériger l'architecture de la dynamique et de la mécanique céleste tout en fournissant au calcul différentiel et intégral l'élan vital qui lui manquait.

Les Mathématiques au CEGEP

Collection Mathématiques nouvelles

Cours 101

INITIATION À LA MATHÉMATIQUE, par Roch Ouellet

Livre de l'étudiant $7.00
Solutionnaire $4.00

Ce manuel, où les prérequis sont intégrés au texte, permet de se familiariser avec ces outils mathématiques fondamentaux que sont les ensembles, les nombres réels, les relations d'équivalences, les fonctions, les groupes. . .
Ce manuel s'est mérité le prix du livre de l'Association mathématique du Québec en 1972.

Cours 103

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL I, par Jean Ménard

Livre de l'étudiant $7.00
Solutionnaire $4.00

Ce livre est moderne quoique non révolutionnaire
- Par les sujets qu'il traite;
- Par la technique d'enseignement qu'il propose.

Cours 203

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL II, par Jean Ménard

Livre de l'étudiant $7.00
Solutionnaire $4.00

Ce livre fait suite au **Calcul I** dont l'auteur présente un résumé succinct en guise de chapitre de révision.

Le livre lui-même comprend trois grandes parties:
- Introduction aux concepts de base de l'analyse mathématique et en particulier à la continuité;
- Suites et séries de nombres, séries de puissances;
- Mesure des aires, intégrales de Riemann et applications.

ÉDITIONS F.I.C., La Prairie, P.Q.