Le texte qui suit nous a été fourni par Charles de Flandre et Guy W. Richard du département de mathématique de l'Université du Québec à Montréal.

PREMIERE PARTIE

1. Tendances

Depuis le siècle dernier nous sommes au seuil d'énormes changements technologiques qui ont un impact à tous les niveaux des institutions sociales, politiques ou académiques. Ces changements ont et auront de plus en plus un double effet sur l'enseignement des Mathématiques à l'élémentaire: changements dans le contenu de la matière et dans les méthodes d'enseignement.

L'accélération dans les progrès de la technologie amènera une situation dans laquelle nos connaissances deviendront de plus en plus périssables dans le futur. Dans cette perspective, comment pouvons-nous aider les jeunes par l'enseignement de la mathématique à s'adapter à ces changements. Depuis 1945 beaucoup de réformes ont été tentées en mathématique , mais ces réformes ne se préoccupaient que des changements du contenu avec la rationalisation sous-jacente, qu'en changeant le contenu on pourrait répondre aux exigences de la nouvelle époque technologique. Même si ces réformes s'avéraient nécessaires, il parut évident pour certains que la présentation d'un nouveau contenu seulement était insuffisante pour aider les jeunes à s'adapter à ces changements et que les étudiants de tous les niveaux devraient de plus apprendre à manipuler ce nouveau contenu. Dès 1960, J. Bruner montrait que les concepts de nouvelles disciplines mathématiques, antérieurement réservés pour la mathématique de niveau secondaire ou universitaire, pouvaient être comprises par de jeunes enfants.[1] Les réformes entreprises au niveau élémentaire ont malheureusement très peu changé la

1. J. Bruner, The Process of Education, (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1960).

situation. Toffler dans son livre Future Shock exprime ce que devrait être l'éducation à tous les niveaux: "Les élèves doivent apprendre comment rejeter des idées vieilles et, quand et comment les remplacer. Ils doivent, en somme, apprendre comment apprendre."[2]

Quand il était interviewé par A. Toffler, Herbert Gerjuoy, un psychologue de l'Organisation de Recherches des Ressources Humaines, a aussi exprimé cette nouvelle conception:

> La nouvelle éducation doit enseigner à l'individu comment classifier et reclassifier de l'information, comment évaluer sa véracité, comment changer de catégorie quand c'est nécessaire, comment se déplacer du concret à l'abstrait et de retour, comment envisager les problèmes sous un nouvel angle ou sous une nouvelle direction, - comment s'éduquer. L'illettré de demain ne sera pas l'homme qui ne sait pas lire; il sera l'homme qui n'a pas appris comment apprendre. [3]

En tenant compte de ceci, on se trouve en accord avec Dienes qui, à propos de l'éducation par la mathématique à l'élémentaire déclare:

> La vie d'aujourd'hui est basée davantage sur la production de plus en plus de structures complexes. On aura besoin d'un nombre considérable de personnes qui seront capables de faire face à des situations hors de l'habituel et imprévues, dans le monde extrêmement complexe que l'on construit. Il est probablement inutile de rédiger un curriculum fixe en mathématique sur ce que les enfants devraient apprendre car ce qu'ils apprendraient maintenant aurait probablement très peu d'importance en regard aux problèmes qu'ils auront à faire face dans vingt ans. On peut comprendre ceci en revisant les vingt dernières années et en regardant toutes les compétences requises aujourd'hui et qui n'ont même pas été considérées il y a vingt ans, comme par exemple: les sciences de l'ordinateur.[4]

Les deux questions qu'on peut maintenant se poser sont:

1) Quels devraient être les buts de l'apprentissage des mathématiques au niveau élémentaire pour préparer les jeunes enfants à s'adapter aux futurs changements dans les curriculum mathématiques?

2) Comment pourrait-on atteindre ces buts?

2. A. Toffler, Future Shock, (New York City: Bantam Books, 1971), p. 414.

3. Ibid.

4. Z.P. Dienes, Some Reflections on Learning Mathematics (International Study Group of Mathematics Learning, Sherbrooke, Canada: Sherbrooke University, May 1969), p. 22.

2. Objectifs

En 1963, soixante-dix-neuf mathématiciens et hommes de science se sont rencontrés pour discuter les buts de l'enseignement des mathématiques. Le rapport de cette réunion fut connu sous le nom de: "THE CAMBRIDGE CONFERENCE ON SCHOOL MATHEMATICS", organisé et administré par: "Les Services Educationnels Inc." L'objectif des participants était d'apporter, en ayant en vue des réformes futures de longue portée, des idées prospectives pour le contenu des curriculum des mathématiques. Quoique l'accent fut placé sur le contenu, trois buts généraux étaient impliqués dans le rapport produit. Ces buts furent résumés dans le vingt-septième annuaire du National Council of Teachers of Mathematics. Ces trois buts principaux sont:

1) Aider les enfants à développer une méthode de penser: pensée créative et autonomie.
2) Aider les enfants à développer un intérêt et un goût accru pour les mathématiques.
3) Aider les enfants à développer une confiance en soi.[5]

Dienes est d'accord avec les objectifs mentionnés ci-dessus et en a précisé d'autres. En formulant son ensemble d'objectifs pour l'éducation par les mathématiques, il a analysé ceux donnés par la plupart des enseignants et les a classifiés sous deux titres, qui, ensemble, forment une classe. Il a intitulé cette classe, "Economique-utilitaire (matérialiste)." Le premier sous-ensemble de cette classe est composé des objectifs qui répondent aux demandes du progrès scientifique,[6] tandis que le deuxième sous-ensemble est composé d'objectifs répondant aux besoins de la vie quotidienne.

Dienes souligne qu'enseigner des mathématiques à l'élémentaire, en se basant uniquement sur ces objectifs, n'aiderait pas les jeunes enfants à s'adapter aux changements futurs. D'après lui, le but prépondérant de l'enseignement de la mathématique est d'enseigner la mathématique en prenant soin de valoriser la personnalité, où le mot 'personnalité' doit être compris dans un sens techni-

5. Cambridge Conference on School Maths., Goals for School Mathematics, Houghton Miffin Co., Boston Mass., 1963.

6. Z.P. Dienes, Building up Mathematics (London, England: Hutchinson Press, 1963) p. 31.

que comme 'la structure de la personne'".[7] Ainsi ce but prépondérant est d'ordre psychologique et envisage comme issue l'adaptation des générations futures aux changements accélérés de notre société. Dienes élabore ce but primordial dans le paragraphe suivant:

> C'est un principe psychologique généralement accepté que la personnalité évolue par un processus d'intégration; c'est-à-dire par le procédé de mettre littéralement les pièces d'une personne ensemble et éventuellement construire une totalité cohérente. Une personne intégrée aura une opinion plus diversifiée et plus large face aux problèmes, qu'une autre personne qui contrairement aura une opinion personnelle ou sectionnée. La personne intégrée cherchera des liaisons plutôt que des différences et... elle sera capable de s'adapter à son environnement... Si la mathématique pouvait aider ce processus d'intégration de n'importe quelle façon, ce serait alors une des raisons des plus valides pour laquelle les enfants devraient apprendre la mathématique.[8]

Ce but est renforcé par un article de A.W. Combs intitulé: "Théorie de la Personnalité et ses Implications dans le Développement du Curriculum", qui a été présenté à la réunion de l'Association pour la Surveillance et le Développement de Curriculum en 1959. Sa thèse principale est:

> On commence à comprendre qu'apprendre est un problème de personnalité totale... N'importe quelle pièce d'information aura son effet sur le comportement et cet effet dépend jusqu'à quel point un individu découvre sa signification personnelle. En termes plus techniques on pourrait dire que l'effet de n'importe quelle pièce d'information dépendra de sa distance psychologique de soi-même. De cette façon apprendre devient la découverte de la signification personnelle. On pourrait penser que toute l'information qu'une personne a besoin, pour faire un ajustement efficace à la vie, existe comme sur une continuité de ce qui est très près de soi à ce qui est très loin de soi. Le problème d'apprendre devient alors un problème de déplacer l'information de la partie "pas-à-soi" de cette continuité à la partie "à soi".[9]

7. Ibid., p. 24.

8. Ibid., p. 25.

9. A.W. Combs, "Personnality Theory and Its Implications for Curriculum Development," Learning More about Learning, ed. A. Frazier (The Third Association for Supervision and Curriculum Development Research Institute, Washington D.C. Association for Supervision and Curriculum Development, 1959), pp. 7-14.

Les objectifs secondaires que Dienes a formulés et qui ont dirigé ses recherches sur l'apprentissage des mathématiques dans le développement d'un curriculum sont:

1) Aider les étudiants (enfants ou adultes) à penser en termes de bases axiomatiques de structures mathématiques.

2) Aider les étudiants à apprendre à abstraire et à généraliser.

3) Aider les étudiants à décrire des concepts mathématiques selon des méthodes symboliques.

4) Aider les étudiants à prendre conscience des structures mathématiques.[10]

5) Aider les étudiants à apprendre et à adopter des principes démocratiques tels que la discipline de soi, la motivation de soi et à développer un intérêt[11] pour la recherche.

Ces objectifs sont consistants avec les buts préconisés par les conférenciers de la Conférence Nationale sur la Recherche Requise dans l'Education Mathématique qui ont mis l'accent sur le besoin d'enquêter sur l'efficacité relative de stratégies données dans la poursuite d'objectifs et de buts spécifiques, tel le développement de l'habileté à résoudre des problèmes, l'habileté à découvrir de nouvelles relations ou même à trouver de nouvelles généralisations.[12]

Certains éducateurs mathématiques et psychologues ont recommandé une théorie d'instruction qui met l'accent sur le développement de concepts sélectionnés pour aider les enfants à abstraire ces structures.[13]

10. Z.P. Dienes, <u>The Power of Mathematics</u> (London, England: Hutchinson Press, 1963).

11. Z.P. Dienes, <u>Building up Mathematics</u>.

12. J.F. Grosswhite, "Summary of Discussion", <u>Journal of Research and Development in Education</u>, 1, no. L (Fall, 1967).

13. E. Biggs, <u>Freedom to Learn</u> (Canada: Addison-Wesley, 1969); J. Bruner, <u>op. cit.</u>; Z.P. Dienes, <u>Building up Mathematics</u>; F.W. Land, <u>New Approaches to Math Teaching</u> (London, England: MacMillan Company, 1963); J. Piaget, "How Children Form Mathematical Concepts, "<u>Selected Readings on the Learning Process</u> ed. T.L. Harris and W.E. Schwahn (New York: Basic Books, 1961) pp. 358-365.

Comme les enfants ont des expériences et des perceptions diversifiées, l'abstraction d'un concept mathématique n'a pas lieu automatiquement en ne leur présentant qu'une seule concrétisation multiple d'un concept. Quelques éducateurs croient que des concepts mathématiques peuvent être appris à des jeunes enfants en leur fournissant plusieurs exemples de niveau symbolique.

Se basant sur les résultats de leurs recherches, d'autres éducateurs ont conclu que des concepts peuvent être abstraits en fournissant des activités variées qui concrétisent les mêmes structures mathématiques. Ce dernier groupe de chercheurs croit que bien qu'il n'y ait pas de conclusions évidentes, il semble qu'il est fortement souhaitable que l'abstraction soit faite par celui qui apprend avant que des symboles puissent être employés effectivement et appliqués dans un large éventail de situations.[14]

Même si aucune théorie n'a été formulée sur l'acquisition des connaissances en mathématique, Dienes est un de ceux qui font des recherches dans ce domaine et il a formulé une théorie basée sur les théories de Piaget. Dienes a identifié les étapes suivantes pour l'acquisition de concepts mathématiques:

1) Etape du jeu durant laquelle l'enfant à l'interaction initiale avec des matériaux ou symboles. C'est l'étape manipulative.

2) Etape de découverte des régularités et de jeu avec des ensembles de règlements ou de contraintes.

3) Etape de comparaison où l'enfant est amené à chercher des isomorphismes entre les jeux qu'il joue.

4) Etape de représentation durant laquelle l'enfant travaille avec des diagrammes, graphiques ou représentations illustrant l'isomorphisme.

5) Etape de symbolisme où l'enfant décrit les propriétés de la représentation sous forme symbolique.

14. Z.P. Dienes, "On Abstraction and Generalization", Harvard Educational Review, XXXI, No.3 (Summer 1961), pp. 281-301; J. Bruner "Some Theorems on Instruction Illustrated with References to Mathematics, "The Sixty-third Yearbook of the National Society for the Study of Education, Part I, Chapter XIII (Chicago Press, 1964) Z.P. Dienes, An Experimental Study of Mathematics Learning (London, England: Hutchinson Press, 1963); R. Skemp, The Psychology of Learning Math (Baltimore, Maryland: Penquin Books), 1970.

6) Etape de formalisation durant laquelle les descriptions sous forme symbolique deviennent des règles pour de nouveaux jeux. Ces règles deviennent des axiomes et les propriétés qui découlent de ces règles sont appelées des Théorèmes.[15]

Les résultats des études de Bartlett, Bruner, Dienes et Wheeler indiquent que les concrétisations multiples qui incorporent des matériaux manipulatoires sont utiles aux enfants lorsqu'ils abstraient des concepts mathématiques et généralisent d'après ces concepts. Dienes, en particulier, a contribué à des recherches sur la concrétisation multiple. Se basant sur deux hypothèses il a énoncé le Principe de Concrétisation Multiple.
(Il a dit) :

> Le degré d'abstraction d'un concept est directement proportionnel à la quantité de variété des expériences desquelles il fut abstrait et il semble à priori, que plus le nombre de situations desquelles un concept a été abstrait est large, plus le nombre de situations appropriées sera large dans lequel ce concept sera reconnu comme étant applicable.[16]

Pourquoi l'abstraction et la généralisation sont-elles si importantes pour apprendre des concepts mathématiques? Alexander offre une réponse possible à cette question dans le paragraphe suivant:

> Le processus d'abstraction est la clef dans nos procédés de la pensée. Nous découvrons comment il est important de reconnaître le rôle de l'abstraction quand on fait une analyse. "Analyser veut littéralement dire: un relâchement ou un démêlement". Une analyse requiert qu'on abstrait les composantes en portant notre attention sur elles, une à la fois ou en combinaisons variées et en notant leurs interrelations fonctionnelles. Ensuite, on peut comprendre la totalité lorsqu'on la synthétise ou lorsqu'on la reprend de nouveau dans notre imagination conceptionnelle... La pratique d'abstraire est, en conséquence, la base de sa réussite ou de son échec. Comme l'abstraction inclut non seulement l'habileté à mettre au point l'attention sur les pièces et les aspects un à la fois, mais aussi l'habileté à maintenir chaque

15. Z.P. Dienes, "An Example of the Passage from the Concrete to the Manipulation of Formal Systems", Educational Studies in Mathematics (Dordrecht-Holland; D. Reidel Publishing Company, 1971), pp. 337-352.

abstraction comme un objet de la pensée sans lui permettre de s'enfouir avec d'autres abstractions (au moins jusqu'à ce qu'on soit prêt à ce que ceci arrive). Il s'en suit qu'une large partie de la difficulté, que la plupart de nous avons avec l'abstraction délibérée et consciencieuse, est simplement celle d'exclure les facteurs que nous ignorons et de les exclure jusqu'à ce qu'il soit temps de les inclure de nouveau d'une façon ordonnée. Si nous étions plus familier à ceci, une bonne partie de la confusion dérivant des intrusions des choses inapplicables dans nos considérations pourrait être éliminée. [17]

La généralisation diffère de l'abstraction, mais ce sont des processus alliés puisque la généralisation implique l'extension ou la formation d'une classification. Polya, une personne de renommée mondiale dans l'enseignement de la mathématique, insiste sur la résolution des problèmes par des méthodes heuristiques, il implique dans ses oeuvres qu'il y a ces deux composantes dans la pensée mathématique, et que par l'emploi de concrétisations multiples, qui représentent la structure des problèmes mathématiques, celui qui apprend peut être aidé à résoudre ainsi des problèmes.[18]

Pour faciliter le processus d'abstraction, des concrétisations des structures mathématiques devraient être présentées à l'étudiant de manières variées. L'emploi de jeux différents, d'histoires différentes ou de problèmes qui font appel à la réalité de tous les jours, qui concrétisent un concept particulier peut être l'une de ces manières. Une autre serait l'emploi de matériaux manipulatoires différents comme des Blocs multi-base, des matériaux d'Expérience Algébrique, des Réglettes Cuisenaires, etc. tous pouvant être employés pour développer les concepts de systèmes de nombres et de structures algébriques.

Une autre partie de ce compte rendu présentera une rationalisation en vue de changer les méthodes d'enseignement des mathématiques aux niveaux élémentaire et secondaire.

17. G.H. Alexander, Language and Thinking (New York City: D. Van Nostrand Company, 1967), p. 117.

18. G. Polya, How to Solve It (Garden City, N.Y.: Doubleday 1957); Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving (New York: Wiley & Sons, 1965).