Coin du problème

Voici une nouvelle chronique qui, nous l'espérons, captivera nos lecteurs. Cette chronique paraîtra mensuellement. On trouvera une solution aux problèmes posés dans le bulletin d'avril 1973.

Nous profitons de l'occasion pour demander à nos lecteurs de nous faire parvenir des problèmes (si possible, avec une solution). On aimerait recevoir des problèmes dont l'énoncé est compréhensible pour la majorité des lecteurs.

Un prix en argent est accordé pour la solution d'un problème aux conditions suivantes:

Un jury formé d'André Joyal et de Maurice Joyal décrètera le gagnant ou les gagnants en se basant sur les critères suivants:

1° Si une des solutions reçues est plus "originale" que toutes les autres, le prix sera attribué à l'auteur de cette solution.

2° Si toutes les bonnes solutions sont "équivalentes", le prix est accordé à l'auteur de la première bonne solution reçue.

3° Si aucune bonne solution n'est reçue dans les délais prévus, le problème reparaîtra dans un bulletin subséquent et le prix attribué en sera augmenté.

On peut faire parvenir sa solution à

Equipe du Bulletin
Association Mathématique du Québec
4342, rue Bourbonnière
Montréal 406, Qué.

La date limite pour participer à ce concours est le 10 mars 1973

1. On appelle disque euclidien de rayon $r \in \mathbb{R}$ et de centre (Prix \$10.00)
$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ l'ensemble

$$D(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,a) \leqslant r\}$$

où $d(x,a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$

si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Considérons maintenant quatre points distincts P_1, P_2, P_3, P_4 du plan $\mathbb{R}^2$. Supposons que chaque sous-ensemble de trois points parmi ces quatre points soit contenu dans au moins un disque euclidien de rayon unité. Démontrer que ceci entraîne qu'il existe un disque de rayon unité contenant les quatre points P_1, P_2, P_3 et P_4 .

(André Joyal)

2. Etant donné deux points distincts P, Q du plan $\mathbb{R}^2$, le segment $[P, Q]$ est, par définition, l'ensemble de tous les points points de la droite passant par P et Q et situés entre P et Q, P et Q inclus. (Prix $10.00)

Démontrer qu'étant donné un ensemble de cinq points P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 du plan $\mathbb{R}^2$ tel qu'aucun sous-ensemble de trois points soit aligné, alors on peut trouver deux paires disjointes $\{P_i, P_j\}$, $\{P_k, P_r\}$ incluses dans $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ telles que les segments $[P_i, P_j]$ et $[P_k, P_r]$ se rencontrent.

(André Joyal)