

Ramifications Mathématiques

(Cette chronique a pour but de présenter des sujets variés de l'arbre des mathématiques, sous forme d'exemples simples et de questions intégrées au texte, de façon à mettre en évidence des résultats mathématiques fondamentaux).

ROULEMENTS SPIROGRAPHIQUES

par Gilbert Labelle,
département de mathématiques
Université du Québec à Montréal

§0. Introduction

Le lecteur connaît déjà sûrement le jeu "spirograph" qui permet de tracer facilement plusieurs genres de cycloïdes par roulements intérieurs ou extérieurs d'une roue dentée sur une autre (ou sur une "droite" dentée).

Les questions suivantes viennent tout de suite à l'esprit. Comment calculer le nombre de "tours" exact de la roue mobile pour compléter un cycle complet? Comment évaluer la longueur et l'aire engendrés par la courbe fermée obtenue? Peut-on généraliser le spirographe en acceptant des courbes quelconques (continument doublement différentiables au moins), plutôt que des cercles ou des droites pour construire les cycloïdes?

Nous débuterons par un traitement complet de cette dernière question que nous appliquerons, entre autres, aux deux premières.

§1. Définitions de base

Toutes les courbes $C = C(s)$ seront données, sauf avis contraire, explicites et sous leur forme intrinsèque, c'est-à-dire où le paramètre "s" est la longueur

l'arc depuis le "point de départ" $C(0)$ et varie de 0 à L où L est la longueur de C . Ces courbes seront planaires et on conviendra d'identifier \mathbb{R}^2 au plan complexe \mathbb{C} pour faciliter les calculs. Supposant (comme on l'a déjà dit) nos courbes au moins deux fois continument différentiables et se rappelant que $C'(s) = \frac{dC}{ds}$ est un vecteur tangent de longueur 1 (ici c 'est un nombre complexe de module 1) au point $C(s)$ pour chaque $s \in [0,1]$ on pose la définition suivante.

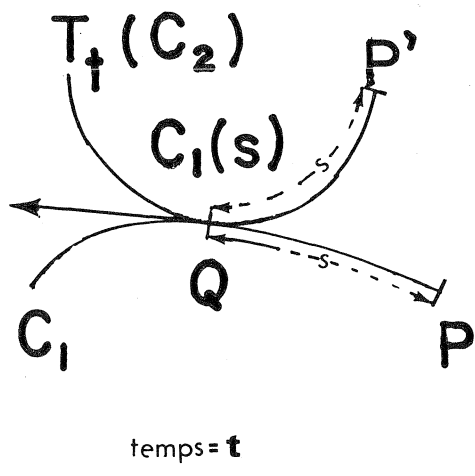
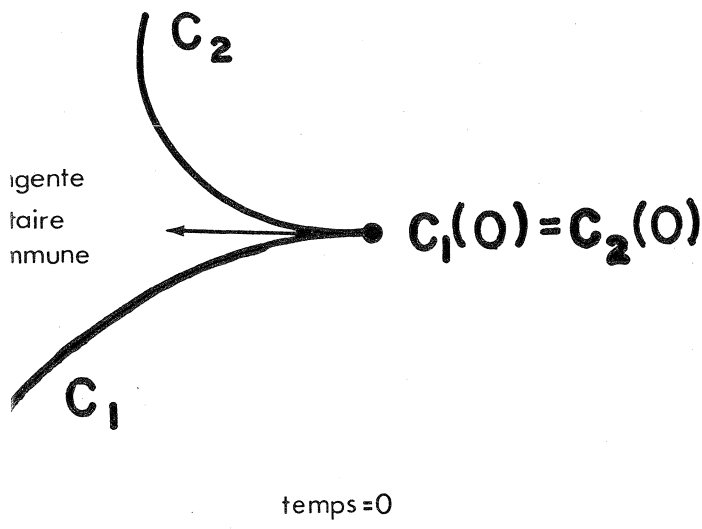
Définition 1

Deux courbes $C_1 = C_1(s)$ et $C_2 = C_2(s)$ partent identiquement si
 $C_1(0) = C_2(0)$ et $C_1'(0) = C_2'(0)$.

Cette condition veut simplement dire que les deux courbes ont même point de départ et même vecteur tangent unitaire en ce point.

Comment faire rouler C_2 le long de C_1 pour imiter les mouvements spirographiques?

Pour répondre à cette question, nous allons nous guider par les figures suivantes:



où $T_t: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une transformation euclidienne i.e. $T_t(\omega) = e^{i\theta(t)}\omega + b(t)$ qui varie avec le temps t .

Supposant que l'équation intrinsèque de la courbe image $T_t(C_2)$ est donnée par $(C_2)_t = (C_2)(s)$ pour chaque valeur de t et que $s = s(t)$ est la longueur commune des arcs \widehat{PQ} et $\widehat{P'Q}$ au temps t on a la définition

Définition 2

Soient $C_1 = C_1(s)$ et $C_2 = C_2(s)$ deux courbes partant identiquement. On dira que la courbe C_2 roule le long de C_1 si pour chaque valeur $t \geq 0$ (du temps) on a une courbe $(C_2)_t = e^{i\theta(t)}C_2 + b(t)$ telle que $(C_2)_0 = C_2$

et
$$C_1(s) \Big|_{s=s(t)} = (C_2)_t(s) \Big|_{s=s(t)} \quad \dots(1.1)$$

et
$$C_1'(s) \Big|_{s=s(t)} = (C_2)'_t(s) \Big|_{s=s(t)} \quad \dots(1.2)$$

Si au temps $t = 0$, on se choisit un point $a \in \mathbb{C}$, la famille de points $T_t(a)$ où t varie tracera une courbe. C'est cette courbe que nous allons étudier.

Définition 3

Si C_1 et C_2 partent identiquement et si C_2 roule le long de C_1 , la courbe C donnée par le parcours $T_t(a)$, $t \geq 0$ est appelée la cycloïde partant de a engendrée par C_2 roulant le long de C_1 . On l'appellera, pour plus de concision, la (a, C_1, C_2) -cycloïde.

Le plus souvent C_1 et C_2 seront des courbes fermées (non nécessairement simples ou "convexes").

La définition suivante est tirée des équations différentielles et servira dans la section 2.

Définition 4

Soient $f_1, f_2 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ où $U \subseteq \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) deux fonctions dérivables sur U. On appelle la fonction $W(f_1, f_2)$ définie par

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \quad \dots(1.3)$$

le wronskien de (f_1, f_2) .

Pour tout $u \in U$ on a donc

$$W(f_1, f_2)(u) = f_1(u)f_2'(u) - f_1'(u)f_2(u).$$

Notation:

Soit $D_R = \{z \mid |z| = R\}$ et soit $a \in \mathbb{C}$. On désignera par $\text{Moy}(R, a)$ la moyenne des distances des points de D_R au point a définie par l'intégrale:

$$\text{Moy}(R, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i\theta} - a| d\theta. \quad \dots(1.4)$$

La valeur exacte de cette intégrale pour un a général ne peut s'exprimer à l'aide d'une formule contenant un nombre fini de fonctions élémentaires usuelles combinées à des opérations algébriques.

C'est en général une intégrale elliptique qui permet de l'évaluer.

En effet, on a

$$\begin{aligned} 2\pi \text{Moy}(R, a) &= \int_0^{2\pi} |e^{i\theta} - a| d\theta = \int_0^{2\pi} |e^{i\theta} - |a|| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + |a|^2 - 2|a|R \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R + |a|)^2 - 4|a|R \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(R + |a|)^2 - 4|a|R \cos^2 \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(R + |a|)^2 - 4|a|R \sin^2 \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(R + |a|)^2 - 4|a|R \sin^2 \varphi} \, d\varphi = 4(R + |a|) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

$= 4(R + |a|) E(k)$ où $E(k)$ désigne l'intégrale elliptique complète du second type de paramètre $k = 2\sqrt{|a|R} / (R + |a|) \leq 1$. Voir [1] pour une table des valeurs de E pour chaque k .

Toutefois, on a une expansion en série pour $E(k)$.

En effet, si $k^2 < 1$, on trouve

$$\begin{aligned} E(k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sum_{v \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{v} (-1)^v k^{2v} \sin^{2v} \varphi \, d\varphi \\ &= \sum_{v \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{v} (-1)^v k^{2v} \int_0^{\pi/2} \sin^{2v} \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}^2 \frac{k^2}{1} - \binom{\frac{1}{2}}{2}^2 \frac{k^4}{3} - \binom{\frac{1}{2}}{3}^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right) \end{aligned}$$

De plus, si $k^2 = 1$, on a

$$E(1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi = 1.$$

On en déduit

Lemme

$$\text{Moy}(R, a) = \left\{ \begin{array}{l} (R + |a|) \left(1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}^2 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{4|a|R}{(R+|a|)^2} - \binom{\frac{1}{2}}{2}^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16|a|^2 R^2}{(R+|a|)^4} - \dots \right) \\ \quad \text{si } a \neq R, \quad \dots (1.5) \\ \frac{4R}{\pi} \quad \text{si } |a| = R. \end{array} \right.$$

§2. Formules générales

Lorsque nous parlerons de l'aire définie par la courbe fermée (simple ou non) C donnée par une équation paramétrique (intrinsèque ou non) $C(t) = x(t) + iy(t)$ nous entendrons par là la valeur de l'intégrale de ligne

$$\frac{1}{2} \int_C xdy - ydx \quad \dots(2.1)$$

Lorsqu'on parlera de la longueur de la courbe (fermée ou non) C , on entendra par là la valeur de l'intégrale de ligne

$$\int_C \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \dots(2.2)$$

Dans notre contexte actuel, si t varie dans l'intervalle $[0, \sigma]$ l'intégrale (2.1) vaut

$$\frac{1}{2i} \int_0^\sigma \overline{C} C' dt \quad \dots(2.3)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \int_0^\sigma \overline{C} C' dt &= \frac{1}{2i} \int_0^\sigma \left[(xx' + yy') + i(xy' - x'y) \right] dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_C xdx + ydy + \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx \end{aligned}$$

à cause du théorème de Green. L'intégrale (2.2) vaut évidemment

$$\int_0^\sigma |C'| dt \quad \dots(2.4)$$

Les quantités $\frac{1}{2i} \overline{C} C'$ et $|C'|$ seront donc fondamentales.

$$C = C_1 + (a - C_2)C_1' \overline{C}_2' \quad \dots(2.5)$$

$$= (aC_1' + W(C_1, C_2)) \overline{C}_2' \quad \dots(2.5)'$$

$$C' = (a - C_2)(C_1'' \overline{C}_2' + C_1' \overline{C}_2'')$$

$$= (C_2 - a)W(C_1', C_2')(\overline{C}_2')^2 \quad \dots(2.6)'$$

donnent une paramétrisation (en général non intrinsèque) de la courbe C et la tangente C' (en général non unitaire) associée à cette paramétrisation.

Démonstration. Il suffit d'éliminer t dans les équations

$$C_1(s) = e^{i\theta(t)} C_2(s) + b(t) \quad \dots(2.7)$$

$$C_1'(s) = e^{i\theta(t)} C_2'(s). \quad \dots(2.8)$$

Par (2.8), on a $e^{i\theta(t)} = C_1'(s) / C_2'(s)$ ce qui donne par substitution dans (2.7),

$$b(t) = C_1(s) - C_1'(s) C_2(s) / C_2'(s).$$

La transformation T_t envoie donc le point a sur

$$\begin{aligned} T_t(a) &= e^{i\theta(t)} a + b(t) \\ &= a C_1' / C_2' + W(C_1, C_2) / C_2' \\ &= (aC_1' + W(C_1, C_2)) \overline{C}_2' \end{aligned}$$

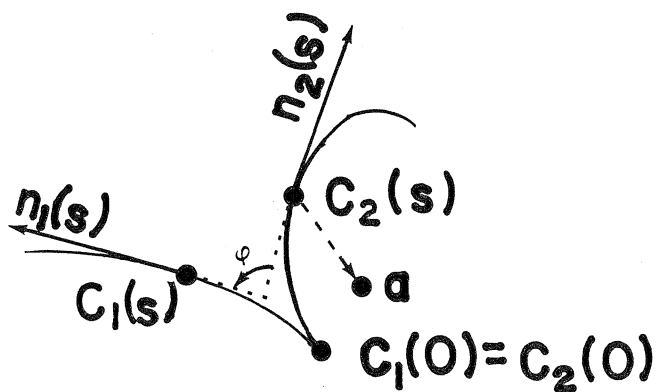
car $|C_2'| = 1$ et d'où $\overline{C}_2' = 1 / C_2'$

Les autres égalités se déduisent de la première par simple calcul, (ne pas oublier que $\overline{C}_2'' = (1/C_2')' = -C_2'' / (C_2')^2$)

Remarquons que si dans un théorème on suppose que $a = 0$ les formules se simplifient d'une façon appréciable et réduisent les calculs dans certains cas.

La formule (2.5)' s'interprète géométriquement de la façon suivante.

Pour obtenir le point $C(s)$ il suffit de prendre (voir figure) la tangente unitaire $n_2(s)$, l'appliquer sur $n_1(s)$ en entraînant rigidement la courbe C_2 et le point a en effectuant une transformation euclidienne-affine dont la "partie angulaire" est φ ; le point a "deviendra" alors le point $C(s)$ cherché sur la cycloïde.



$$n_1 = C_1'(s)$$

lié en $C_1(s)$

et

$$n_2 = C_2'(s)$$

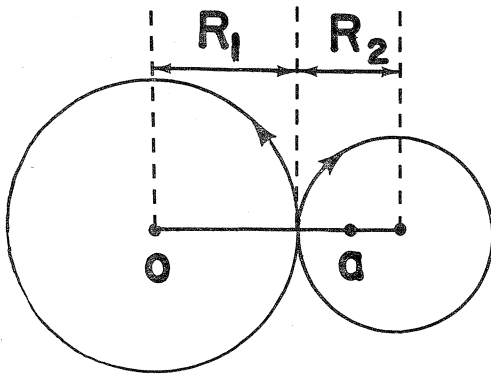
lié en $C_2(s)$

Si C_1 et C_2 sont des courbes fermées de longueurs respectives L_1 et L_2 alors si on enroule C_2 autour de C_1 n_1 fois où $L_2/L_1 = n_2/n_1$ est un nombre rationnel écrit sous sa forme irréductible, alors on obtient nécessairement une courbe fermée. Le cas où $L_2/L_1 \notin \mathbb{Q}$ ne donne pas nécessairement de courbe fermée à la longue.

En effet, la dernière partie est immédiate et la première partie se démontre en supposant (sans perte de généralité) que $L_1 = n_1$, $L_2 = n_2$ et comme n_1 et n_2 sont premiers entre eux, le plus petit multiple de n_2/n_1 donnant un multiple de n_2 est obtenu par multiplication par n_1 .

§3. Applications

- 1) Cas où C_1 et C_2 sont deux cercles tangents extérieurement et a est une distance δ du centre de C_2 . On peut toujours supposer que



$$C_1(s) = R_1 e^{is/R_1}$$

et

$$C_2(s) = R_1 + R_2 - R_2 e^{-is/R_2}$$

Le théorème général nous donne l'équation non intrinsèque (en général)

$$C(s) = \left[(R_1 + R_2) - \delta e^{is/R_2} \right] e^{is/R_1} \quad \dots(3.1)$$

On déduit par simple calcul que la longueur d'un pas de la cycloïde (ici c'est une épicycloïde) obtenue est

$$2\pi \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \text{Moy}(R_2, \delta) \quad \dots(3.2)$$

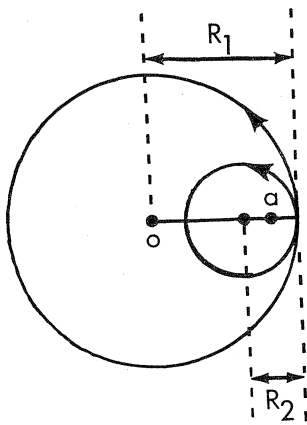
et l'aire est donnée par

$$\pi(n_1 + n_2) \left[(R_1 + R_2)R_2 + \delta^2 \right] \quad \dots(3.3)$$

où $\frac{L_2}{L_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{n_2}{n_1}$ est une fraction irréductible.

2) Cas où C_1 et C_2 sont deux cercles tangents intérieurement et a est à une distance δ du centre de C_2 . On a alors une hypocycloïde.

On peut toujours supposer que



$$C_1(s) = R_1 e^{is/R_1}$$

et

$$C_2(s) = R_1 - R_2 + R_2 e^{is/R_2}$$

Les formules (3.1), (3.2) et (3.3) prennent alors les formes

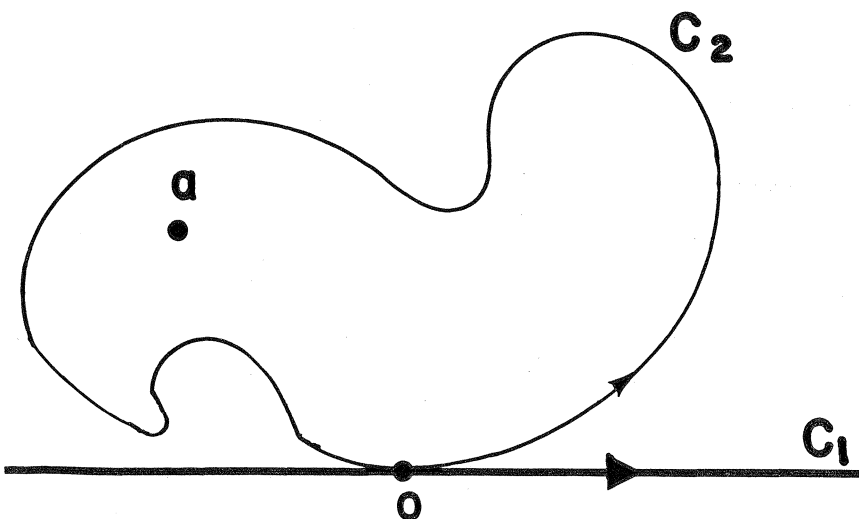
$$C(s) = \left[(R_1 - R_2) + \delta e^{-is/R_2} \right] e^{is/R_1} \quad \dots(3.1)'$$

$$2\pi \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \text{Moy}(R_2, \delta) \quad \dots(3.2)'$$

$$\pi (n_1 - n_2) \left[(R_1 - R_2)R_2 - \delta^2 \right] \quad \dots(3.3)'$$

De plus, si $R_1 = 2R_2$ alors C est une ellipse qui dégénère en double diamètre si $\delta = R_2$.

3) Cas où C_1 est une droite et C_2 est quelconque. On peut supposer que



$$C_1(s) = s .$$

Les formules (3.1) et (3.2) deviennent

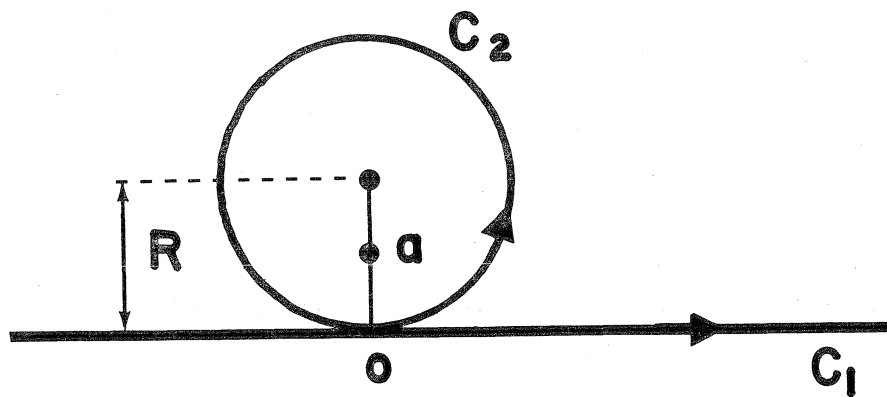
$$C(s) = s - (C_2(s) - a) \overline{C_2'(s)} \quad \dots(3.1)''$$

$$\int_0^{L_2} |C_2 - a| |C_2'| ds \quad \dots(3.2)''$$

La formule (3.3) qui donne l'aire ne s'applique pas comme telle car la cycloïde n'est pas une courbe fermée ici. Toutefois, l'aire sous un pas de C peut se calculer par la formule

$$\int y dx = \int_0^{L_2} (\text{Im } C)(\text{Re } C)' ds .$$

4) Cas où C_1 est une droite, C_2 est un cercle et a est à une distance δ du centre de C_2 . On peut supposer que



$$C_1(s) = s$$

$$C_2(s) = iR(1 - e^{is/R}).$$

Les formules (3.1) et (3.2) deviennent

$$s + iR - i \delta e^{-is/R} \quad \dots(3.1)'''$$

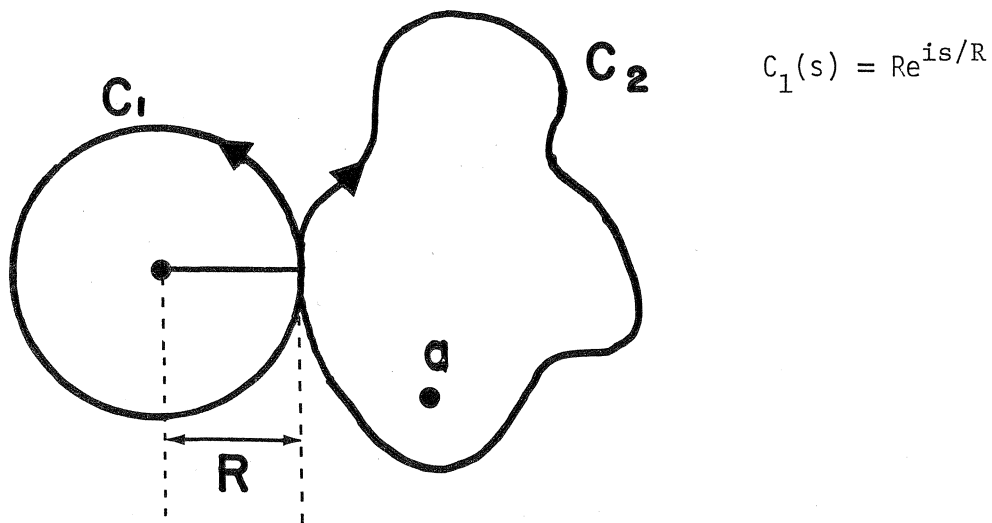
$$2 \pi \text{ Moy}(R, \delta) \quad \dots(3.2)'''$$

La formule donnant l'aire sous un pas s'évalue comme dans le numéro 3 en remarquant que $y = \text{Im}C = R - \delta \cos(s/R)$ et $x = \text{Re} C = s - \delta \sin(s/R)$ et donne

$$\pi(2R^2 + \delta^2) . \quad \dots(3.4)$$

5) Cas où C_1 est un cercle et C_2 quelconque.

On peut supposer que



Les formules explicites sont assez complexes mais on a l'estimé suivant:

$$\lambda_\infty - \frac{M}{R} L \leq \lambda_R \leq \lambda_\infty + \frac{M}{R} L \quad \dots(3.5)$$

où λ_R désigne la longueur d'un pas de la (a, C_1, C_2) -cycloïde considérée et λ_∞ la longueur d'un pas de celle (qui correspond au cas où $R \rightarrow \infty$) où C_1 est une droite, M et L représentant respectivement la distance moyenne des points de C_2 au point a et la longueur de C_2 .

De plus, ces inégalités sont les meilleures possibles car on a (comme on le vérifie aisément) égalité à droite (respectivement à gauche) pour les épicycloïdes du numéro 1 (respectivement les hypocycloïdes du numéro 2.)

Pour vérifier (3.5), le calcul direct donne

$$\lambda_R = \int_0^L |C_2 - a| \left| \frac{C_2'}{R} + iC_2'' \right| ds$$

et il suffit de remarquer que

$$\left| C_2'' \right| - \frac{1}{R} = |iC_2''| - \left| \frac{C_2'}{R} \right| \leq \left| iC_2'' + \frac{C_2'}{R} \right| \leq |iC_2''| + \left| \frac{C_2'}{R} \right| = |C_2''| + \frac{1}{R}$$

d'intégrer et d'utiliser le numéro 4.

6) Dans le cas où $\delta = R_2$ et $\delta = R$ les formules (3.2), (3.3), (3.2)', (3.3)' et (3.2)''' prennent les formes

$$8R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right), \quad \pi (n_1 + n_2) R_2 (R_1 + 2R_2),$$

$$8R_2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right), \quad \pi (n_1 - n_2) R_2 (R_1 - 2R_2),$$

et $8R$

respectivement.

De plus, l'aire sous un pas, encore dans le cas $\delta = R$ pour le numéro 4 vaut $3 \pi R^2$.

Remarquons que ces dernières formules sont toutes des fonctions rationnelles en R_1 , R_2 et R donc facilement "calculables".

Ce sont des expressions que l'on retrouve habituellement dans les exemples classiques des cycloïdes.

Nous terminons par une remarque destinée au lecteur connaissant un peu de géométrie différentielle.

La courbure $K = K(s)$ d'une courbe $C = C(s)$ est définie par la formule

$$\frac{C''(s)}{C'(s)} = iK(s)$$

Pour chaque s , la courbure est géométriquement l'inverse du "rayon de courbure" (qui est le rayon orienté du "meilleur" cercle tangent à la courbe C au point $C(s)$).

La formule de la longueur d'arc pour une (a, C_1, C_2) -cycloïde prend, comme on le vérifie facilement, la forme

$$\int_0^s |C_2(s) - a| \cdot |K_1(s) - K_2(s)| ds$$

où $K_1(s)$ et $K_2(s)$ sont les courbures de C_1 et C_2 . On rappelle que $K_1(s)$ et $K_2(s)$ ont des signes différents si C_1 et C_2 ne "tournent" pas dans le même "sens" aux points $C_1(s)$ et $C_2(s)$.

REFERENCE

- [1] Mathematical Tables from Handbook of Chemistry & Physics. Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio.