Rétrospectives . . .

EVOLUTION DU CONCEPT DE DERIVEE

par: Jean-Paul Collette
Cegep Montmorency

René Descartes (1596-1650) philosophe, homme de lettres et mathématicien, fut par la force des choses le rival de Fermat sur plusieurs points touchant les mathématiques. Une première rivalité naît avec la parution de "La géométrie" qui marque la fusion de la géométrie et de l'algèbre dans ce qui est communément appelé "la géométrie analytique". La géométrie analytique de Descartes fut publiée en appendice dans le "Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences" et est parue en 1637, alors que le court traité de Fermat intitulé "Ad locus planos et solidos isagoge" (Introduction aux lieux plans et solides) ne fut connu du grand public que lors de sa publication en 1679.

Malgré que le traité de Fermat apparaît beaucoup plus tard que celui de Descartes, on est certain aujourd'hui que Fermat avait découvert essentiellement la même méthode bien avant la parution de "La géométrie". Descartes et Fermat utilisent tous les deux l'algèbre de Viète mais réalisent cette fusion de la géométrie et de l'algèbre en ayant recours à des approches très différentes.

Descartes tente de traduire les opérations algébriques dans le langage de la géométrie. Fermat met plutôt l'emphase sur la représentation graphique des solutions des équations. Descartes part d'un problème de lieu et de celui-ci il obtient une équation algébrique du lieu. Fermat considère plutôt le problème inverse, partant d'une équation algébrique il en dérive les propriétés de la courbe. Suivant Descartes, les courbes de la géométrie sont celles pour lesquelles il est possible de les représenter sous forme d'équations. Fermat étudie essentiellement les courbes définies par des équations. En un mot, Descartes est celui qui décrit les propriétés d'une courbe par une équation alors que Fermat introduit les courbes par des équations.

Cette rivalité sur le plan des idées et des conceptions mathématiques persiste à travers le problème de la recherche des tangentes. En effet, Descartes attaque le problème des tangentes vers 1637 en cherchant à déterminer la "normale" à la courbe en un point M donné. Il suffit de considérer un autre point sur la courbe, le point P, et de chercher l'équation du cercle dont le centre doit se trouver sur l'abscisse passant par M et P. Puis en égalant à zéro le discriminant de l'équation qui détermine les intersections du cercle avec la courbe, on trouve ainsi le centre du cercle où P coincide avec M. Un peu plus tard, il fit la remarque que l'intersection de droites pouvait être utilisée à la place du cercle.

Considérons l'exemple de la parabole $y^2 = 2m\,x$; la normale au point $M(x,y)$ passe au centre du cercle d'abscisse $(x_1, 0)$ dont l'équation est

$$(x - x_1)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

l'intersection de la courbe avec le cercle donne

$$(x - x_1)^2 + 2\,m\,x - r^2 = 0$$ et en développant

$$x^2 - 2\,(x_1 - m)x + x_1^2 - r^2 = 0$$

si l'on veut que les points M et P coincident, il faut que le discriminant de cette dernière équation s'annule d'où la racine double sera

$$x = x_1 - m$$

connaissant l'abscisse x du point de tangence et la valeur m de la parabole donnée on trouve x_1 , puis le centre connu, la normale et la tangente seront connues. Il appliqua ainsi sa méthode à plusieurs problèmes difficiles et le moins que l'on puisse dire c'est qu'il a réussi à tracer les tangentes à de nombreuses courbes avec une méthode plus ou moins laborieuse.

Le problème des tangentes fut étudié par de nombreux mathématiciens parmi lesquels deux noms méritent d'être mentionnés dès à présent à cause de leurs approches totalement différentes de celles de Fermat et de Descartes.

Le premier Gilles Personne de Roberval (1602-1675) professeur au Collège Royal de France pendant près de quarante années est le seul véritable mathématicien professionnel parmi les mathématiciens français du groupe de Mersenne[1].

1- Marin Mersenne (1588-1648) a maintenu une correspondance constante avec les plus grands mathématiciens de son époque et diffusait les idées mathématiques de ses correspondants aussitôt qu'il les recevait.

Etre titulaire de cette chaire au Collège Royal signifiait l'obligation pour le détenteur de préparer un examen, à tous les trois ans, afin de savoir celui qui lui succéderait. Pour se maintenir en poste, il se devait de garder ses découvertes pour lui, car on imagine bien que pour les questions qu'il préparait, il était souvent le seul à en connaître les réponses. Par ailleurs cet état de fait provoquait souvent des querelles au sujet de la priorité de certaines découvertes dont il était en droit parfois d'en justifier la primeur.

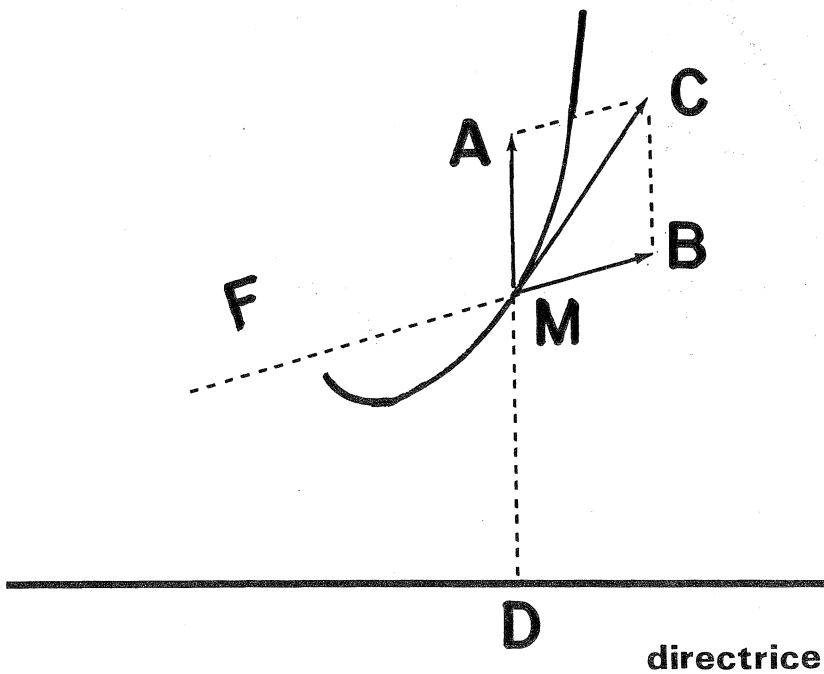
Roberval pense la courbe en termes d'un point mobile et la tangente en tout point de la courbe est la ligne de mouvement instantané du point considéré. Au sujet de sa méthode des tangentes, il s'exprime comme suit: "La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point là... Par les propriétés spécifiques, (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point à l'endroit où vous voulez mener la touchante; de tous ces mouvements, composez en un seul et tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la courbe".[1]

Il semble que Roberval fut le premier à étudier la tangente à la cycloïde à la suite d'une suggestion de Mersenne. Il détermine sur la cycloïde deux vecteurs issus d'un point de tangence, l'un représentant la composante de translation (horizontale), l'autre la composante de rotation (tangente au cercle générateur de la cycloïde) et la résultante de ces deux vecteurs est le vecteur vitesse instantanée tangent à la cycloïde. Dans le cas de la cycloïde, les deux composantes vectorielles sont numériquement égales, par conséquent, le vecteur vitesse instantanée bisecte l'angle entre les deux composantes vectorielles. Roberval appliqua sa méthode à de nombreuses courbes incluant les coniques, la famille des conchoïdes, la spirale mathématique, etc.

Le second, Evangelista Torricelli (1608-1647) ami de Cavalieri et élève de Galilée s'illustra grandement dans l'application de la méthode des indivisibles (il surpasse Cavalieri sur ce sujet) et procéda sensiblement de la même manière que Roberval dans la construction des tangentes à la courbe. (La controverse au

1- Cf Observations sur la composition des mouvements, Mémoires de L'Académie Royale des Sciences, Vol VI, 1730, pp. 24-25c.

sujet de celui qui fut le premier, entre Roberval et Torricelli, à utiliser la méthode de composition des mouvements n'est pas encore éteinte parmi les historiens des mathématiques). On peut illustrer cette méthode dans le cas de la parabole par le diagramme suivant:

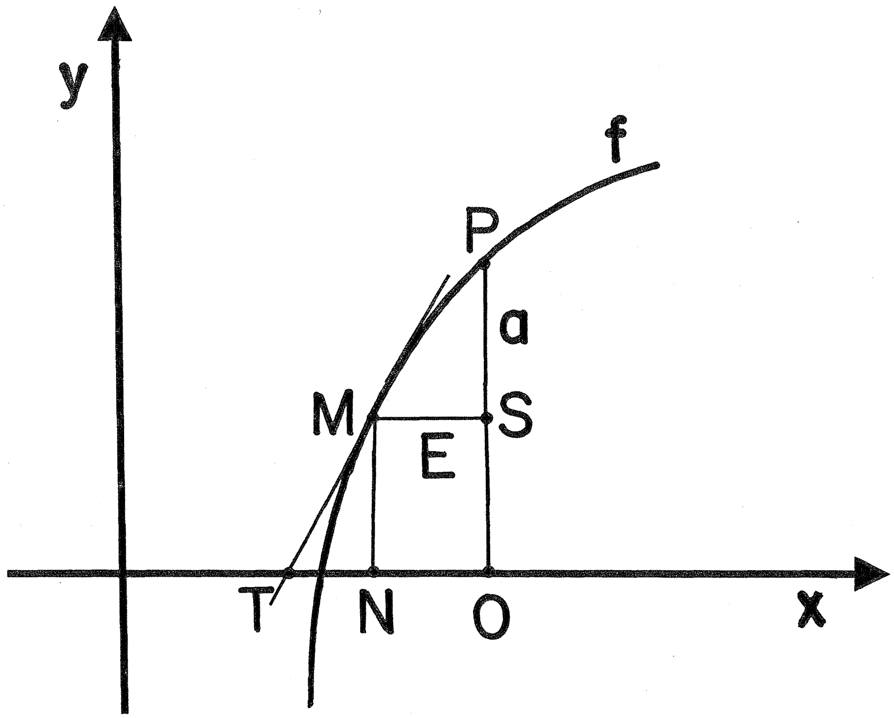


puisque $|FM| = |MD|$ (par définition de la parabole)

par conséquent $|\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA}|$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ où $\overrightarrow{Mc}$ bisecte l'angle $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

Le prolongement des idées impliquées dans les méthodes de Fermat et de Descartes se retrouve dans les travaux mathématiques de Barrow et de Sluse.

Isaac Barrow (1630-1677), mathématicien, physicien, astronome, théologien, fut le professeur de Newton et lui céda sa chaire à Cambridge en 1669. Tous les travaux mathématiques de Barrow sont géométriques et le plus important de ces travaux "Lectiones geometricae" (1670) contient sa méthode basée sur le triangle différentiel. La méthode de Barrow ressemble beaucoup à celle de Fermat mais il utilise deux quantités - Fermat utilisait une seule quantité E - quantités qui sont équivalentes à notre notation moderne Δx et Δy. Soit à chercher la tangente au point M de la courbe ci-dessus:



le point P est voisin du point M et le point T est le point de rencontre de la tangente avec l'axe des x; les triangles PMS et MTN sont semblables si l'on accepte que l'arc MP est très petit; ainsi, comme le dit Barrow, lorsque le triangle devient très petit (ΔPMS) nous avons

$\frac{SP}{MS} = \frac{MN}{TN}$ et en utilisant SP = a et MS = E , nous obtenons $\frac{a}{E} = \frac{\text{ordonnée de M}}{\text{sous-tangente TN}}$

où le rapport $\frac{a}{E}$ pour des points P et M très près (à la limite P et M sont dans un voisinage de la fonction f) et donne la pente de la courbe de f au point M. Par conséquent, l'introduction du concept de limite dans la méthode de Barrow permettrait de transformer $\frac{a}{E}$ en $\frac{dy}{dx}$. Selon l'opinion de Boyer, Barrow fut celui qui toucha le plus près de la nouvelle analyse inventée par Newton et Leibniz parmi tous ceux qui anticipèrent des parcelles du calcul différentiel et intégral. Plus précisément le professeur de Newton semble avoir été le premier à réaliser pleinement la relation inverse entre le problème des tangentes et les quadratures de courbes.

René-François de Sluse (1622-1685), chanoine de la cathédrale de Liège pendant plus de trente ans, fut un homme d'une érudition formidable doué pour les mathématiques d'un esprit d'invention et de généralisation. Dans ses moments de loisirs (trop rares selon lui) il a réussi à publier quelques rares écrits qui lui valurent immédiatement une estime des mathématiciens de son temps.

La première solution du problème des tangentes donnée par de Sluse est au fond la méthode cinématique de Roberval et de Torricelli. Influencé par Torricelli (de Sluse séjourna en Italie de 1642-1651) il tente de généraliser la méthode cinématique à tous les mouvements uniformément accélérés. Ainsi, pour un mouvement $s(t) = \frac{1}{2} gt^2$ Torricelli trouve la vitesse comme étant $t \frac{ds}{dt} = 2as$ (où $s = 0$, $ds = 0$ lorsque $t = 0$)
a est une constante
et de Sluse remplace le 2 par k d'où

$$t \frac{ds}{dt} = k \text{ as} .$$

Or ce qui est intéressant au point de vue analytique, c'est la combinaison des deux formules suivantes:

$t \frac{ds}{dt} = k$ as et $s = a\, t^k$ où a est une constante.

en effet, en posant $a = 1$ on a

$\frac{d}{dt} (t^k) = kt^{k-1}$ (formule valable pour tout k).

La seconde méthode du savant liégeois aboutissait précisément à cette formule mais seulement pour les valeurs entières et positives de k. Malheureusement pour lui, lorsqu'il trouva le résultat de sa deuxième méthode, il avait perdu de vue la première, et n'a pas pensé à établir entre les deux un rapprochement si évident pour nous.

Sa deuxième méthode est déduite de la méthode de Barrow (il semblerait que Barrow, à la demande de Newton, aurait donné sa méthode à de Sluse), et vient simplifier d'une façon très élégante et très simple le résultat obtenu par la méthode de Barrow. En principe, la méthode de Barrow est la suivante. Soit

$f(x,y) = 0$ et $(x + E, y + A)$ les coordonnées d'un point voisin de (x,y) d'où

$f(x + E, y + A) = 0$ en négligeant les termes d'ordre supérieur contenant E et a, on trouve ainsi

$E\, f'_x + a\, f'_y = 0$ où f'_x est la dérivée partielle par rapport à x de f.

Le mérite du chanoine de Liège fut de développer une méthode qui pouvait permettre d'écrire immédiatement à partir de l'équation $f(x,y) = 0$ la solution

$E\ f'_x + a\ f'_y = 0$ ou $S = -y \frac{f'x}{f'y}$ dans laquelle a est remplacé par l'ordonnée y et E est remplacé par la sous-tangente S.

On accepte généralement aujourd'hui que l'invention du calcul différentiel et intégral fut l'oeuvre de Newton et de Leibniz (l'un indépendant de l'autre). Les prédécesseurs de ces deux géants contribuèrent à utiliser diverses règles concernant l'intégration, la différentiation, la quadrature de courbes, la rectification de courbes, la tangente, l'idée de limite, le théorème fondamental du calcul. Cependant, ces règles y sont perçues comme des algorithmes adéquats mais d'utilisation restreinte: la plupart de ces règles furent appliquées aux problèmes englobant seulement les fonctions polynômiales ou aux fonctions qui peuvent être transformées en fonctions polynômiales. Les contributions mathématiques de Newton et de Leibniz viennent suppléer le manque du sens universel des règles antérieures par un algorithme général qui peut être appliqué indifféremment à toute fonction, rationnelle ou irrationnelle, algébrique ou transcendentale. L'invention d'un calcul opérationnel muni d'un symbolisme adéquat avec lequel les règles des prédécesseurs y sont appliquées de manière universelle, voilà en quelques mots le sens du nouveau calcul introduit par Newton et par Leibniz.

(suite au prochain Bulletin)