TERMINOLOGIE

M28 EXACTEMENT UN(E)

On suggère que la locution "exactement un(e)" soit préférée à "un(e) et un(e) seul(e)".

P4 FONCTION (APPLICATION)

Définition

Soit A et B deux ensembles.
On appelle application de A dans B une relation (ou correspondance) de A dans B telle que, à tout élément de A, il correspond exactement un élément de B.

Parties de la définition

L'objet application de A dans B est donc constitué des trois objets suivants:

- l'ensemble A, appelé ensemble de départ;
- l'ensemble B, dit ensemble d'arrivée;
- un ensemble de couples (donné tel quel ou au travers d'une règle de formation) nommé graphe de l'application.

Exemples

$A = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

$B = \mathbb{R}$

$G = \{(x, f(x)) \mid f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}\}$

Notation

triplet, flèches.
En pratique on explicite rarement l'application sous la forme "triplet"

$f = \langle G, A, B \rangle$ - cependant qu'implicitement, le triplet soit toujours en vue. Au moment de définir cet objet il est approprié d'en préciser les trois éléments tout en signalant, par la suite, les bons abus.

D'autres formes d'écritures "complètes" sont souvent utilisées, comme:

$f : A \to B : x \mapsto f(x)$

ou

$$\begin{aligned} f : \; & A \to B \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Observer d'une part $\to$ et d'autre part $\mapsto$.

Remarque

De plus en plus on considère les termes "application" et "fonction" comme des synonymes. (Même Georges Papy ne fait plus nécessairement la distinction).
Rf.: Le premier enseignement de l'Analyse, Coll. Frédérique, PUB, 1968, page 20.

Bons abus de langage (ou de symboles)

a) "la fonction $x \mapsto f(x)$"

Par exemple: la fonction $x \mapsto x^2 - 2$
la fonction $x \mapsto \log x$

Ceci lorsque les ensembles A et B sont incontestablement implicites d'après le contexte. En particulier dans un cours élémentaire d'analyse il est entendu, à défaut d'autre indication, que $B = \mathbb{R}$
$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \}$ est définissable au sens de fonction, de façon non équivoque.

Exemple: $x \mapsto \operatorname{tg} x$

Si l'on veut compléter cette expression au sens de la notation complète, on est conduit obligatoirement (dans le cadre de l'étude des fonctions de la variable réelle) à:

$\operatorname{tg} : A \to B : x \mapsto \operatorname{tg} x$

$B = \mathbb{R}$

avec $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0 \}$

b) "la fonction $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ "

Ici encore ce "fragment" permet, au besoin, de reconstruire l'entièreté de la fonction.

c) la fonction $\frac{1}{\sin x}$

la fonction $f(x)$

Mauvais abus de langage

Le Comité incline à mettre l'expression "la fonction $y = x^2 - 1$" dans les mauvais abus. Cependant on rencontre facilement $u = u(x)$, $e = e(t)$, $y(x)$, $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ (!), la fonction $y = x^2 - 1$ chez des auteurs qui cependant fixent correctement la notion de fonction et utilisent dans leurs énoncés f, g, etc.

> Nous reviendrons sur cet aspect dans le prochain article; étant entendu que nos préoccupations concernent surtout l'élaboration de la terminologie la plus efficace, à plusieurs points de vue, dans l'enseignement et non la construction d'un dictionnaire sans plus.

Discussion

Certains membres du comité aimeraient classer l'expression $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x^2 - 3\}$ dans les bons abus de la fonction.

D'autres considèrent qu'il s'agit d'un mauvais abus objectant que cet abus risquerait de perpétuer l'identification de la fonction à son graphe.

En général, les bons abus ont pour but d'alléger la communication et donc probablement la perception. Cependant d'opter pour un abus ne signifie pas qu'il faille en systématiser l'utilisation.

Par exemple:

a) soit une fonction f continue dans $[a, b]$ etc...

b) soit les fonctions f et g admettant chacune une limite en a... (ici il n'y aurait aucune nécessité de dire: soit les fonctions $f(x)$ et $g(x)$...)

c) "faire l'étude de la fonction $f(x) = x^2 - 5x - 6$"

d) pour les fonctions "nommées" il n'y a aucune raison de dire nécessairement la fonction tg x; plutôt que "la fonction tg". Pour ces fonctions on n'écrit pas $f(x)$ mais f_x comme par exemple: sin x et non sin(x), etc.

M29 ENSEMBLE DE DEPART (voir P4)

M30 ENSEMBLE D'ARRIVEE (voir P4)

M31 GRAPHE (voir P4)

Remarque: Lorsqu'il s'agit d'un graphique, ne plus utiliser le mot graphe comme synonyme. Donc toujours graphique pour graphique.

S15 Symbole $\mapsto$ pour "fonction $x \mapsto f(x)$" contrairement à "fonction $x \rightarrow f(x)$"

On rencontre aussi $\curvearrowright$, $-\!\circ\!\!\rightarrow$ et d'autres; le comité opte pour $\mapsto$.

S16 $f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ (voir P4)

M32 RESTRICTION

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction; X une partie de A.

La restriction de f à X, notée $f|X$, est par définition la fonction de X dans B dont la valeur en un point quelconque de X est égale à la valeur correspondante de f.

$f|X : X \rightarrow B : x \mapsto f(x)$

Exemple: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$ (une fonction exponentielle)

$f \,|\, \mathbb{N}^* : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$ (une suite géométrique)

S17 Symbole "restriction" $|$, $f|X$ (voir M32)

	La formule	se lit
S18	$a \leq b$	a est inférieur à b
S19	$a < b$	a est strictement inférieur à b

S20 $a \geqslant b$ a est supérieur à b

S21 $a > b$ a est strictement supérieur à b

S22 $A \subseteq B$ A est inclus dans B

S23 $A \supseteq B$ A contient B

Remarque

Cette façon de lire contredit quelque peu l'usage traditionnel. Cependant la tendance actuelle en mathématique consiste à parler d'ordre (large) dans les termes que le langage usuel utilise pour parler de la relation d'ordre strict correspondante.

En mathématique, par exemple, le "tout" est considéré comme une partie de lui-même contrairement aux acceptions courantes.

Mise en garde

Le comité déconseille la notation $A \subset B$ pouvant signifier soit "A est inclus dans B" (N. Bourbaki)
soit "A est strictement inclus dans B" (par exemple Calame).

M33 FONCTION CROISSANTE

La fonction f est dite croissante ssi $\forall x, y \in A, (x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y))$

(Remarque: On écrit $x \leqslant y$, alors que $x < y$ satisfait, afin de disposer d'une définition équilibrée - voir ci-dessous propriété caractéristique).

Exemples: $\frac{|x|}{x}$, $[\![x]\!]$, log , tg

Propriété caractéristique:

$\forall x, y \in A \ (x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y))$

ou $\forall x, y \in A \ (x \neq y \Longrightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant 0)$

.34 FONCTION STRICTEMENT CROISSANTE

La fonction f est dite strictement croissante ssi $\forall x,y \in A (x < y \Longrightarrow f(x) < f(y))$

Exemple: $x \mapsto 2^x$, log, tg, $x \mapsto 2x + 3$

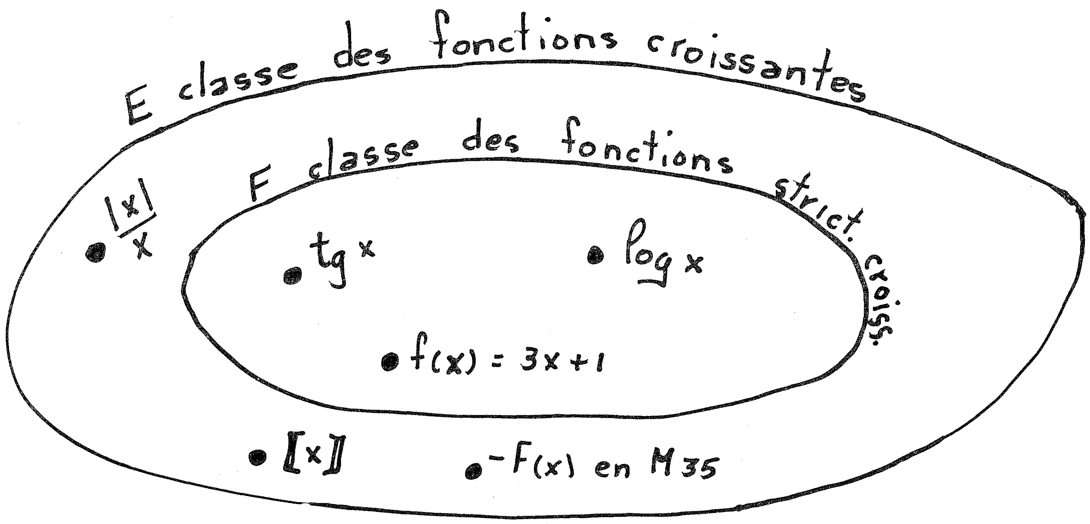
<u>Propriété caractéristique</u>:

$$\forall x, y \in A, \left(x \neq y \Longrightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0\right)$$

<u>Remarque</u>:

Toute fonction strictement croissante est une fonction croissante mais non réciproquement.

Exemple:



M35 FONCTION DECROISSANTE

La fonction f est dite décroissante ssi $\forall x, y \in A \ (x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y))$

Exemple:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} F(x) = 2^{-x} & \text{avec } x \in \left]\infty, 0\right] \cup \left]2, \infty\right[\\ F(x) = 1 & \text{avec } x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété caractéristique:

$$\forall x, y \in A \ (x \neq y \Longrightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant 0)$$

M36 FONCTION STRICTEMENT DECROISSANTE

Exemples: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -2x + 1$

Pour compléter, adapter M34.

M37 FONCTION MONOTONE

On dit d'une fonction f qu'elle est monotone, lorsque celle-ci est soit croissante, soit décroissante, mais non les deux à la fois.

Exemple: La fonction F dans M35

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \varphi(x) = 2^x$

$\log : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : t \longrightarrow \log t$

$f(x) = \frac{1}{x}$

M38 FONCTION STRICTEMENT MONOTONE

Fonction strictement croissante ou strictement décroissante mais non les deux à la fois.

M39 FONCTION CROISSANTE EN UN POINT

f est dite croissante en a ssi $a \in A$ et il existe un voisinage V de a tel que la restriction de f à $V \cap A$ est une fonction croissante.

M40 FONCTION STRICTEMENT CROISSANTE EN UN POINT (adapter M39)

M41 FONCTION DECROISSANTE EN UN POINT (adapter M39)

M42 FONCTION STRICTEMENT DECROISSANTE EN UN POINT (adapter M39)

M43 FONCTION CROISSANTE SUR UNE PARTIE X DE A

f est dite croissante sur X ssi elle est croissante en tout point de X. (Ou ce qui revient au même ssi la restriction $f|X$ est croissante).

Exemple: $f|\mathbb{R}_+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \to f(x) = x^2$

$\sin|X : X \to \mathbb{R} : x \to \sin x$

avec $X = \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

M44 FONCTION MONOTONE SUR UNE PARTIE X DE A

f est dite monotone sur X, ssi la restriction $f|X$ est monotone.

Exemples: $\cos|X : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$

avec $X = [0, \Pi]$

$f|\mathbb{R}_+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^2$

Note du Comité de terminologie

1. Une prochaine réunion portera notamment sur des termes comme abscisse, ordonnée, point, image, valeur, variable, paramètre, variable indépendante, variable dépendante.

2. Communiquez suggestions, critiquez, etc. à:

Comité de Terminologie
Association Mathématique du Québec
4342 rue Bourbonnière
Montréal 406

Le Comité.